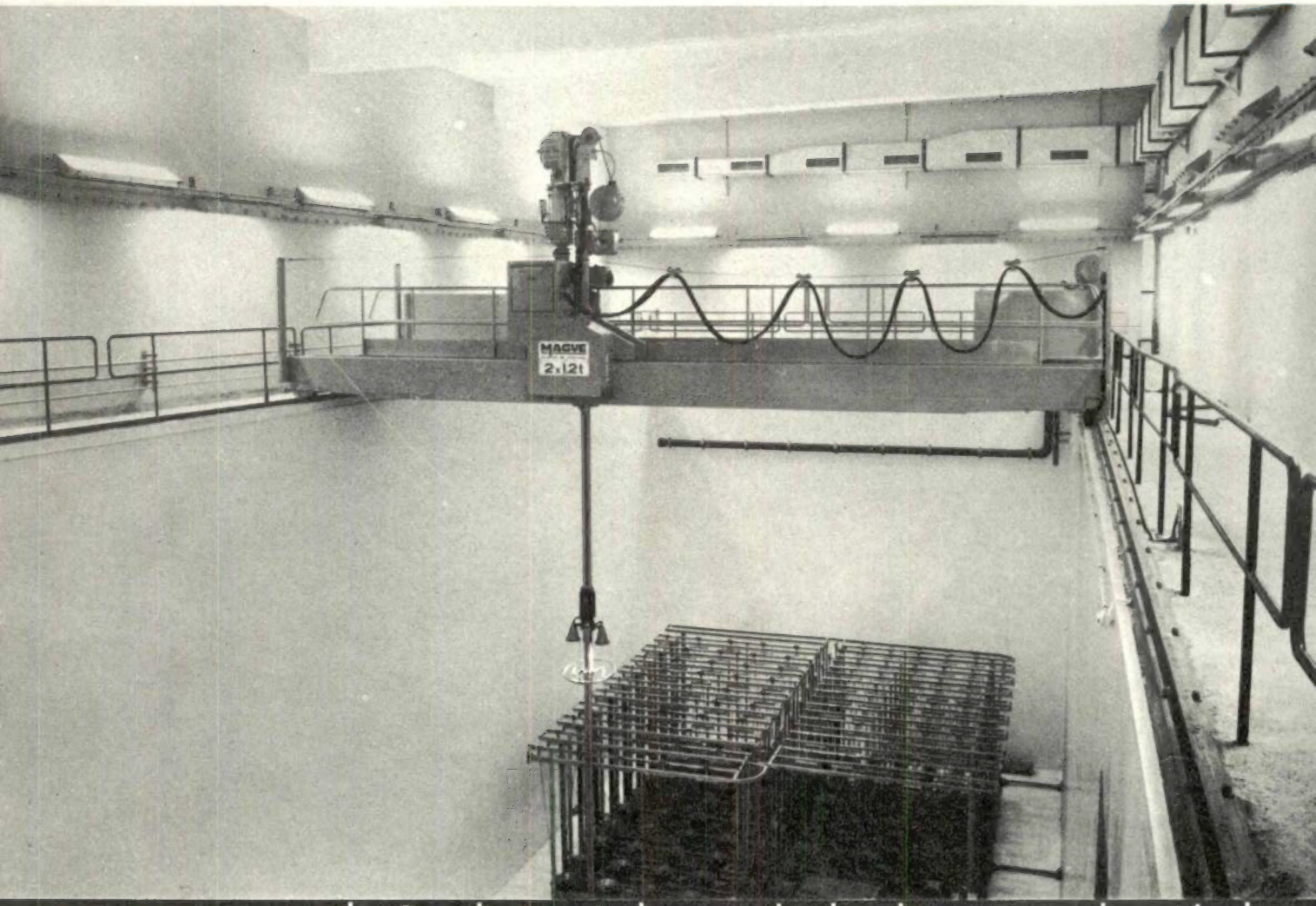
técnica



341

associação dos estudantes do instituto superior técnico

outubro 1964

revista de engenharia

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão – Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

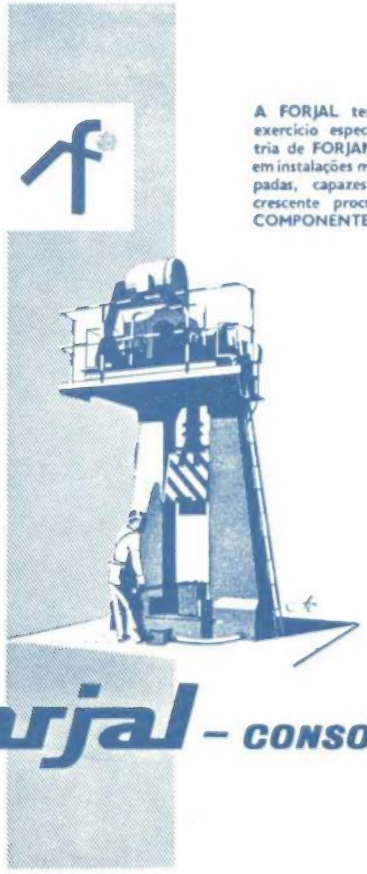
confiança para a construção com

materiais novobra

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

pavimentos
coberturas
vigas de grande vão
asnas
perfis

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS, NOVOBRA, LDA.
AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100, 5.º D - TEL. 774832/766446 - LISBOA-5



A FORJAL tem por objecto o exercício especializado da indústria de FORJAMENTO em SÉRIE, em instalações modernamente equipadas, capazes de satisfazer a crescente procura de PEÇAS e COMPONENTES FORJADOS para:

- máquinas motrizes, máquinas operatórias, máquinas ferramentas,...;
- automóveis, camiões, tractores e outros veículos;
- ascensores, monta-cargas e aparelhagem de movimentação;
- material de caminho de ferro;
- motores, redutores e outra aparelhagem de accionamento;
- máquinas de costura, de escrever, de calcular, de contabilizar, registadoras,...;
- ferramentas e utensílios;
- acessórios para canalizações;
- ferragens para linhas de alta tensão;
- correntes e cadeias;
- aprestos marítimos e construção naval;
- enfim, a mais diversa aparelhagem mecânica e eléctrica.

forjal – CONSÓRCIO PORTUGUÊS DE FORJAGEM, LDA.

RUA DO CAMPO ALEGRE, 606-1.º • PORTO
TELEG. FORJAL-PORTO / TELEF. 65837

técnica

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * TELEF. 77 54 49 * LISBOA-1

— DIRECTOR
J. F. GOMES DE PINA
— ADMINISTRADOR
J.F.CAETANO GONÇALVES
— SECRETÁRIO
J. G. NUNES FERREIRA
— REDACTORES
HELENA ALVES
BARBOSA COLEN
GIRÃO PINA

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ALUNOS DO IST

PUBLICAÇÃO PERIÓDICA
MENSAL

ANO XXXVIII N.º 341
OUTUBRO DE 1964

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	37$50	60$00	110$00
Ultramar Português e Espanha	—	65$00	120$00
Estrangeiro	—	70$00	130$00

NUMERO AVULSO 15$00

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — PONTE ESPECIAL para manipulação de combustíveis irradiados, construída pela MAGUE — Alverca — Portugal

Págs.

Regulação sintética da produção num estaleiro naval
Por Caetano Carreira 1

Vibrações forçadas de sistemas não lineares com elasticidade do tipo k ($x \pm \varepsilon x^3$)
Por Jorge Neves da Silva 17

Momento de inércia, frequência de vibração, massa associada e massa reactiva
Por Carlos de Sousa Amaro Martins 37

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional** 48

Rápida determinação das condições óptimas de compactação dos solos e seu controle em obras de terra
Por J. M. Ressurreição Neto 49

Equipamentos nacionais na indústria nuclear europeia 69

Do Mundo Técnico 75

Biblioteca 79

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

A — Pág.

Aguiar & Melo, Lda. XXXVIII
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. . . XXXVII
Asea Eléctrica Ld.ª XX

B

B. P. XXXII

C

CIDEX IV
CIDLA XXIII
Cimento Secil . . . . . 2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos . . VIII
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos IX
Companhia Portuguesa de Trefilaria XXIV
Companhia União Fabril XIV
C. Santos, Ltd.ª . . . . . VI e XLVI
Construções Técnicas XXV

D

De Roll V

E

Electrotécnicos Reunidos XXVIII
Electro-Arco, Ltd.ª IV
Empresa de Cimentos de Leiria . . XLVII
Empresa Electro Cerâmica XXXIX
Empresa de Produtos Asfálticos. . . X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . . . 3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações XXX

F

Fábrica Portugal II
Fanafel XVI
Filtros Filfro XX
Forjal . . . . . 2.ª da capa
Fundações Franki, Lda. I

G

George Fischer XXXIII
Guedes & Almeida, Lda. XLIV

H

Hidrel XXIV
Harker Sumner & C.ª, Ltd. XLV

I

I. C. I. XXXVI
Impermeábilis XXX
I. S. T. L
Isolux, Lda. XLII

J — Pág.

J. J. Gonçalves — Austin XXXI
Jayme da Costa, Lda XIX
Johann Keller XXXIV

M

MAGUE XIII
Metalúrgica Duarte Ferreira XXVI
Metrimpex XLIII
Monteiro Gomes, Lda. XL

N

Novobra, Lda. . . . . 2.ª da capa

O

Orlando Fernandes XVI

P

Papelaria Fernandes XLI
Pimentel & Casquilho, Ltd.ª III

Q

Quimicor, S.A.R.L. XXIX

R

Romar XVIII

S

Setal XLII
SMEIA XV
Sociedade de Electricidade Brown Boveri . . . . . 4.ª da capa
Soc. Michaelis de Vasconcelos . . . XII
Soc Const. Amadeu Gaudêncio . . XXXV
Sociedade Industrial Metalúrgica . XXXV
Sociedade Portuguesa Cavan VIII
Soc. Electron . . . . . XXIV e XXX
Sondagens e Fundações, A Cavaco . IV
Sondagens Ródio, Ltd.ª XXXV
Sorval XLIX
Sotécnica L
Standard Eléctrica VII
S. T. E. T. XXI

T

Telemec XXXIV
Torrens L
Trelleborgs Gumifabrik XXVII

V

Vasco Pessoa, Lda. XXIV
Vermiculite Portuguesa XXXIV

W

Wild Portugal, Lda. XVII
W. Schmidt XXXIX

Pavilhão da Feira das Indústrias Portuguesas — Lisboa

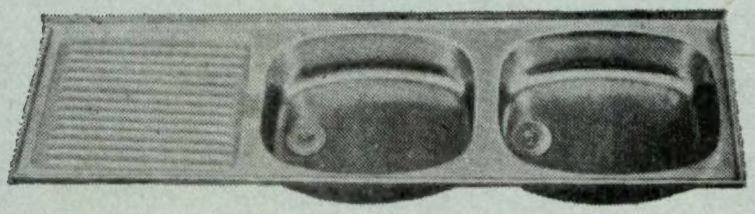
Fundações Sobre 132 ESTACAS FRANKI

FUNDAÇÕES FRANKI, L.DA

Rua Braamcamp, 13, 3.º — Lisboa 1

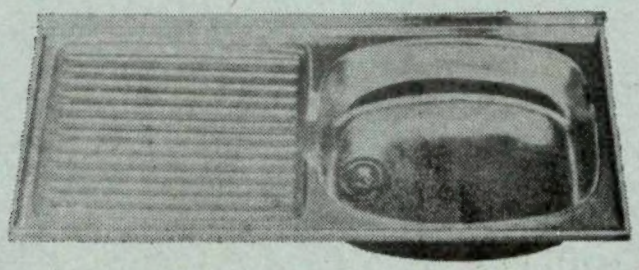
Telefs. 73 41 12/3/4 — End. Teleg. FRANKI

LAVA-LOUÇAS EM AÇO INOXIDAVEL



Modernize os lares de Portugal, usando nas suas cozinhas Lava-Louças em AÇO INOXIDAVEL. Concepção e execução da

FABRICA PORTUGAL



elegantes e higiénicos - duração ilimitada - revestidos de isolante especial - fornecidos com sifão de segurança - não partem a louça

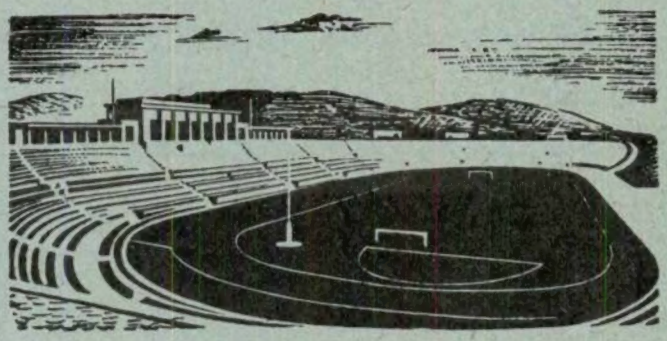
- 8 MODELOS STANDARD - OUTROS MODELOS FORA DE SÉRIE
- MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES
- IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE E NOS SEUS SALÕES DE EXPOSIÇÃO E VENDA

PRAÇA DOS RESTAURADORES - RUA FEBO MONIZ

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

QUASE 40 ANOS AO SERVIÇO DA ENGENHARIA PORTUGUESA



GRANDE SORTIDO DE INSTRUMENTOS DE PRECISÃO, CIENTÍFICOS E INDUSTRIAIS

RUA JARDIM DO REGEDOR, 24, 2.º
LISBOA
TELEF.: 32 43 14 — 32 42 48 ✦ TELEG.: TECNA

Bombas centrífugas «PACIFIC»

Construídas por

Batignolles - Chatillon

Especialmente destinadas para:

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

Sob as condições de funcionamento seguintes:

— Débitos: 1 m³/h a 10.000 m³/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: −180° C + 500° C
— Líquidos: corrosivos ou não

Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.º/Telef. 73 53 07/LISBOA 1

Pesquisas e captações de água

Sondagens

Rebaixamento de níveis aquíferos

Injecções e consolidações de terrenos

Fundações

Estacas de betão

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA-1
— TELEF. 73 35 48 - 5 95 62 - 55 36 73

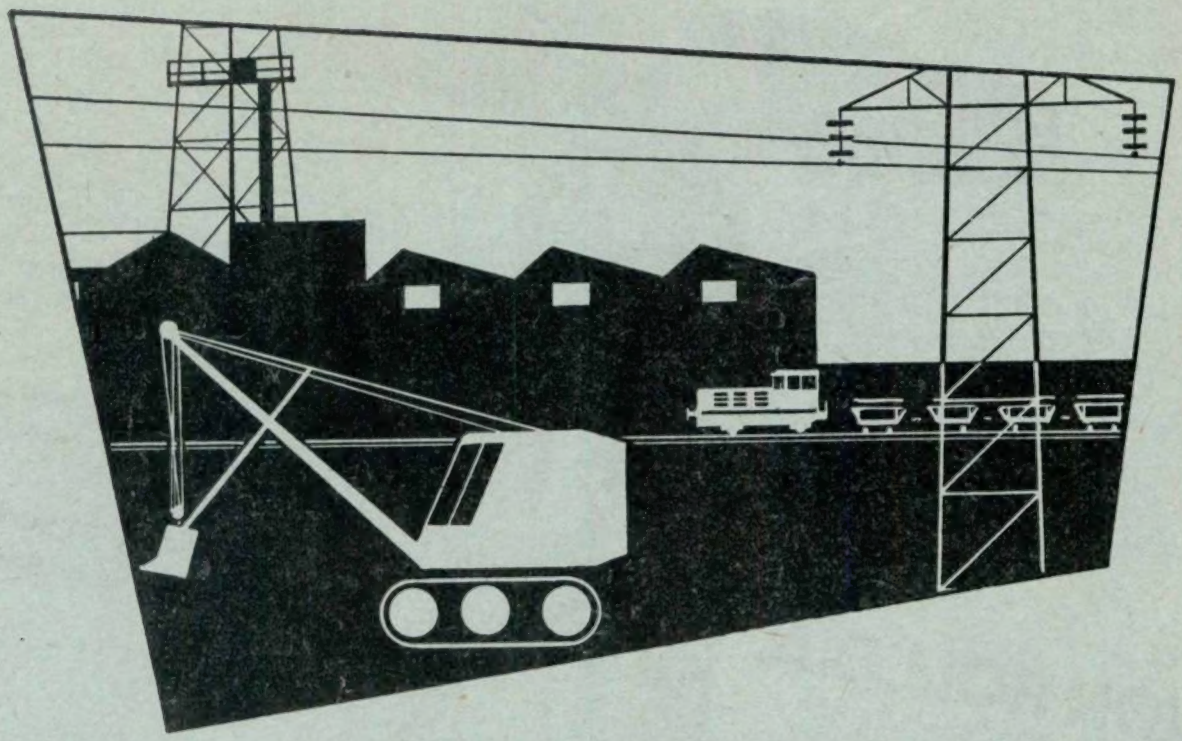
ELECTRO-ARCO
LIMITADA

ELECTRODIOS
POSTOS E ACESSORIOS
PARA A SOLDADURA ELECTRICA

MATERIAL APROVADO PELO
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
VENDA NOVA — AMADORA
LISBOA
RUA SILVA CARVALHO, 239 — TEL 683649
PORTO
RUA DO BOLHÃO, 216 — TEL 21277

Válvulas de cunha, para vapor
Placas de obturação articuladas sobre uma esfera. Estanqueidade permanente
1 Válvulas de passagem
Sede de estanqueidade e haste de aço inoxidável
2 Válvulas para matérias pastosas
Sem necessidade de conservação (sem prensas-estopa nem tampas de limpeza)
3 Válvulas de sede obliqua
para ácidos. Liga cromo-niquel-molibdeno
4 Válvulas de membrana de borracha
Sem prensa-estopa
5 Válvulas de macho
Com elevada resistência aos ácidos
6 Válvula de cunha Sem prensa-estopa
à frente no progresso da construção de válvulas
VON ROLL S.A.
Fábricas de Klus (Suiça)
Representantes em Portugal:
Socotel, Lda.
Rua Sá da Bandeira, 651-4°. Porto
Tel. 27013
1
2
3
4
5
6
VON ROLL



MERCEDES-BENZ

MOTORES INDUSTRIAIS DIESEL

MOTORES PARA TODAS AS APLICAÇÕES INDUSTRIAIS
FAMOSOS EM TODO O MUNDO PELA SUA GRANDE ROBUSTÊS. ECONOMIA
DE CONSUMO E FACILIDADE DE MANUTENÇÃO
MODELOS DESDE 15 A 2.500 H. P.

EM ARMAZÉM:

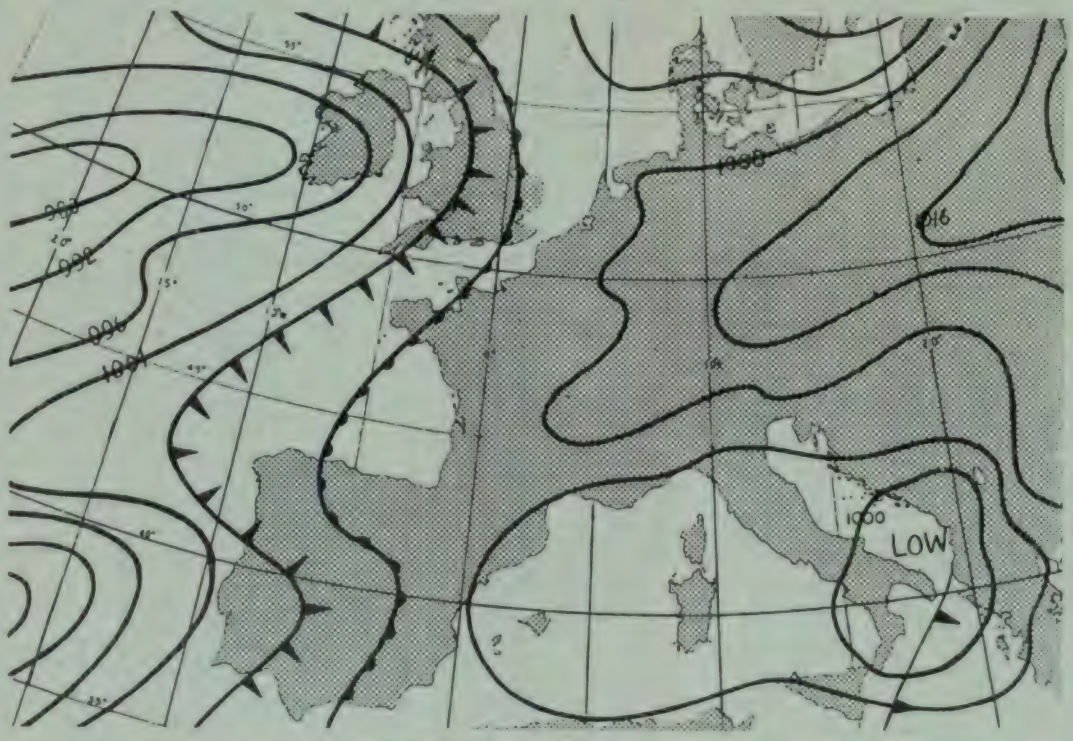
MODELO M B 841 B	25 H. P. — 1.000 R. P. M.
MODELO M 202 B	55 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 203 B	90 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 204 B	120 H. P. — 1.200 R. P. M.

OUTROS MODELOS PARA ENTREGA MUITO RÁPIDA

MOTORES A 4 TEMPOS · ARREFECIMENTO POR ÁGUA
ARRANQUE A AR COMPRIMIDO OU ELÉCTRICO

REPRESENTANTES C. SANTOS, S. A. R. L. — DIVISÃO MARÍTIMA E INDUSTRIAL

29. AV. DA LIBERDADE. 41 — LISBOA
160. R. DE S.TA CATARINA. 168 — PORTO



ELES VOARÃO HOJE FAÇA CHUVA OU SOL

Antigamente a navegação aérea dependia de vários factores entre os quais a visibilidade. Hoje todos os grandes aeródromos do mundo estão equipados com sistemas adequados cujo fabrico está a cargo da ITT (International Thelephone and Telegraph Corp.). O «TACAN», por exemplo, é um equipamento com tal grau de eficiência que permite ao avião, nas piores condições meteorológicas, levantar vôo, seguir rotas e aterrar com a segurança indispensável.

... E recordemos que em cada 30 segundos levanta vôo um avião em qualquer parte do mundo, graças a esse maravilhoso invento dos técnicos da ITT. Ele hoje é de tal modo indispensável que as fábricas do Grupo instaladas na Alemanha, Itália, Canadá, Bélgica, Holanda, Estados Unidos e Japão já possuem as suas linhas de fabrico em plena actividade. O Sistema ITT é uma organização mundial sem paralelo no que respeita a projectos e fabricação neste importante sector.

A **Standard Electrica, S.A.R.L**

É UMA ASSOCIADA DA **ITT**

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

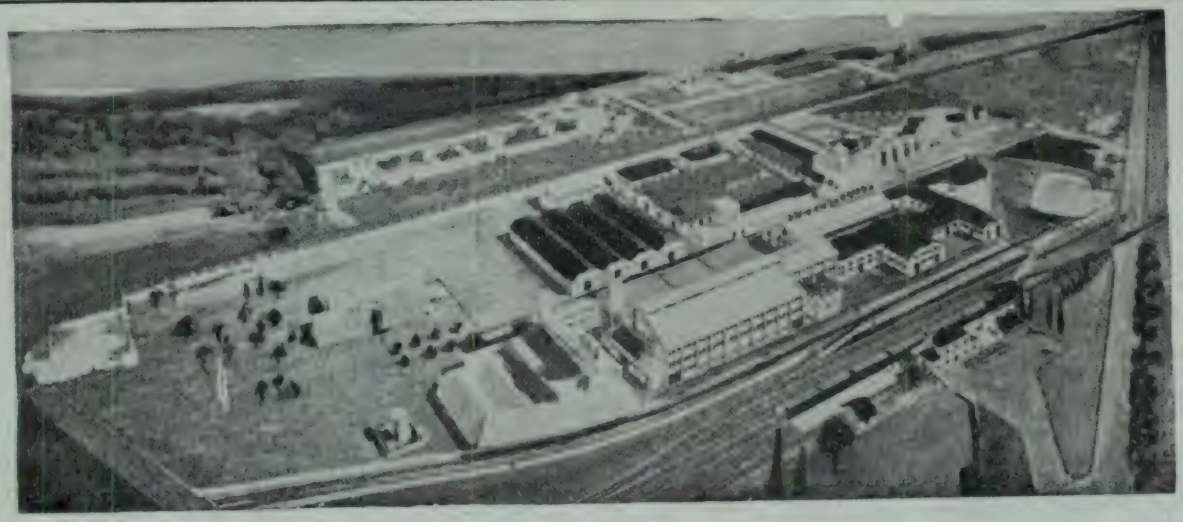
✱

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

✱

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A
TELEF. 47812-50129
LISBOA



COMPANHIA PORTUGUESA DE FORNOS ELÉCTRICOS

PRODUTORA DE

FERRO GUSA

FERRO LIGAS

FERRO-MANGANÊS

SÍLICO-MANGANÊS

FERRO-SILÍCIOS

15 % - 25 % - 45 % - 75 % - 90 %

CARBONETO DE CÁLCIO

CIANAMIDA CÁLCICA

PASTA PARA ELÉCTRODOS

E EM MONTAGEM

GRAFITE

FÁBRICAS
CANAS DE SENHORIM
Telefone 6 72 22

SEDE
Largo de S. Carlos, 4 2.º — LISBOA
Telefones 32 53 43 - 3 55 56 - 36 89 89

Celulite

ISOLAMENTO TÉRMICO DAS CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS

*

TECTOS

*

PAREDES

*

CÂMARAS FRIGORÍFICAS

*

ISOLAMENTOS INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. ✦ RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º ✦ TEL. 73 01 56 — LISBOA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA

TELEF. 73 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS

IMPERMEABILISADOR

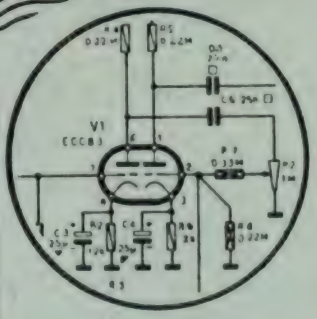
IMEPA

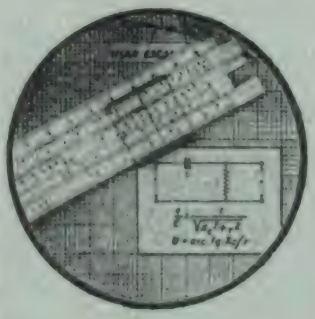
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º - LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM

EQUIPAMENTO DE AMPLIFICAÇÃO DE SOM

BEM CONCEBIDO BEM CALCULADO CONSTRUIDO





LESA

A grande marca italiana

Representantes em Portugal

TELECTRA

EMPRESA TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS ELÉCTRICOS, S. A. R. L.

Rua Rodrigo da Fonseca, 103, r/c
LISBOA — Tel. 68 60 72

Rua Sá da Bandeira, 766-1.º E.
Tel. 2 48 18 — PORTO

ATELIERS DE CONSTRUCTION OERLIKON

Relés extractíveis

para protecção de instalações eléctricas de todo o género

Outros produtos:

Alternadores
Transformadores
Disjuntores
Quadros de comando
Tracção eléctrica
Rectificadores
Electrolisadores
Electroímãs

Ateliers de Construction Oerlikon
Zurich 50 · Suisse

57832. F

Representantes para Portugal e Ultramar: **Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Lda.**

PORTO — P. da Liberdade, 114, 3.º LISBOA — Av. Marquês de Tomar, 94

TÉCNICA

DIRECTOR: J. F. GOMES DE PINA

Ano XXXIX — N.º 341 Outubro de 1964

C. D. U. 658.5.015 : 623.81

REGULAÇÃO SINTÉTICA DA PRODUÇÃO NUM ESTALEIRO NAVAL

PELO ENGENHEIRO CAETANO CARREIRA

RESUMO

Para regular a produção podem usar-se, isolada ou simultâneamente, os métodos analítico e sintético.

O primeiro exige a preparação prévia de todos os trabalhos a realizar, de modo tal que as ordens de execução ao operário sejam dadas por meio duma *ficha de trabalho,* onde tenha sido registada a norma concedida. Segue-se o estabelecimento da melhor ordenação de todas as tarefas de cada encomenda. Preparadas e ordenadas as tarefas de todas as encomendas, carregam-se os diferentes meios de produção, até ao limite das suas possibilidades, respeitando o princípio da rentabilidade máxima. O cálculo das cargas e a sua consequente manobra são assim feitos por um processo de integração, a partir de dados analíticos. No método sintético procede-se por derivação, a partir de dados globais, com dispensa duma preparação prévia pormenorizada de todos os trabalhos.

Está bem de ver que a regulação sintética é menos precisa que a analítica, todavia, além de mais fácil, é muito mais expedita, tornando possível tomar mais cedo decisões globais de importância fundamental para a boa exploração da empresa. O seu uso parece indicado nas firmas que executam trabalhos vultosos, conhecidos com pequena antecedência, quais sejam os da reparação de navios. Em construção nova, com longos prazos de entrega e, sobretudo, repetida com frequência, parece por outro lado não haver dúvidas sobre as vantagens da regulação analítica. Aliás os métodos são complementares e podem usar-se simultâneamente na mesma empresa, o sintético para a regulação forte e integral, o analítico para a regulação fina e parcial.

Apresentadas as principais grandezas a ter em conta na regulação sintética da produção dum estaleiro naval, o autor deduz uma função económica, F, cuja minimização condicionada define o conceito de regulação óptima da produção.

Discute seguidamente várias políticas de exploração de estaleiros e recorda as condições primárias a que devem satisfazer os estudos de mercado, a fim de poderem constituir uma base sólida das previsões de vendas, ponto de partida da regulação sintética da produção. Passa em revista as características de exploração dos navios do mercado tradicional de certo estaleiro. As grandezas relevantes na regulação sintética são analisadas e estabelecidas as respectivas expressões analíticas. O problema da utilização óptima dos operários capazes de exercer mais do que uma função é tratado com cuidado particular.

Em consequência desta análise, o autor define explìcitamente as expressões analíticas dos termos da função económica, F.

1. PRELIMINARES.

Num estaleiro de reparações navais é notável a complexidade de certos factores intrínsecos. No caso da LISNAVE, por exemplo, só a execução conta quase 2000 operários, com mais de 30 especialidades importantes, espalhados numa área de 50 km^2, por oficinas, docas, carreiras, cais e navios ao largo, e operando centenas de máquinas, móveis e fixas.

Por outro lado, os factores extrínsecos levantam problemas ainda mais delicados. As encomendas variam desde a reclassificação dum paquete, que pode gastar 100 000 Homem×hora em 2 meses, à inspecção de rotina dum petroleiro, que pode exigir 1 000 Hh em 2 dias, ou à gravação dum lambrete, que não leva mais de 0,25 Hh.

Como se isto fora pouco, a curva de procura das reparações é muito rígida. Os armadores só mandam reparar os seus navios quando é indispensável, não manifestando interesse em aumentar o volume de reparações só por serem mais baratas, (fig. 1.1).

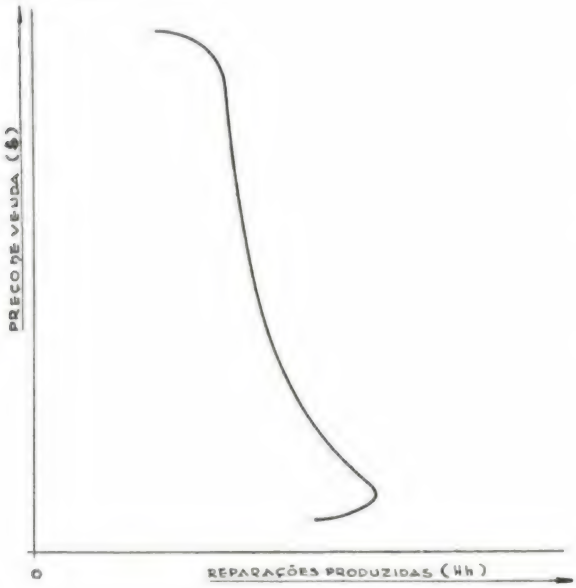


Fig. 1 1 — A curva de procura das reparações navais é muito rígida. Quando o preço é muito alto os armadores retraem-se por razões óbvias. Quando é muito baixo retraem-se na mesma por falta de confiança.

Podia pensar-se que fazer publicidade era uma boa maneira de aumentar o volume de vendas, pela deslocação favorável da curva de procura, (fig. 1.2). Sem negar o interesse da táctica, temos de convir que os armadores, bons comerciantes, impressionam-se pouco com publicidade, exigindo sim factos. Prazo curto na devida altura, preço baixo e qualidade de trabalho que garantam um mínimo de avarias, constituem o seu critério de

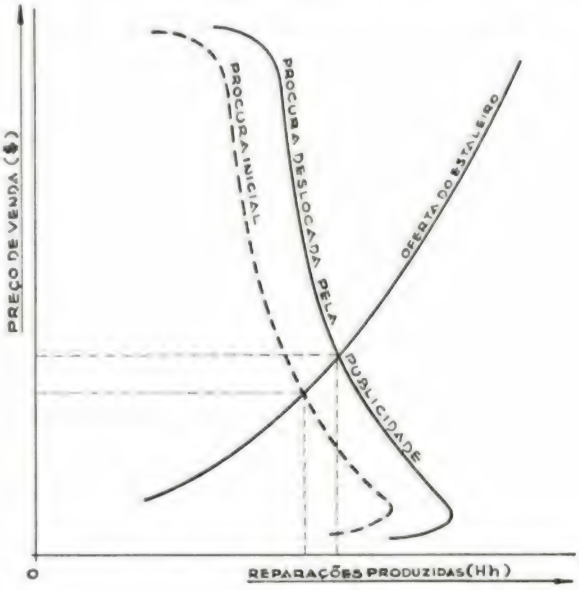


Fig. 1.2 — O volume de vendas final é maior do que o inicial, sem grande alteração da produção.

selecção de estaleiros. A mobilidade dos navios facilita-lhes o uso de tal critério.

Em suma, a variabilidade dos trabalhos solicitados, a rigidez do mercado e a idiossincrasia dos armadores tornam a produção de reparações navais muito irregular, (fig. 1.3).

2. DEPARTAMENTO DA PRODUÇÃO E AS SUAS RELAÇÕES COM OUTROS DEPARTAMENTOS.

2.1. MODELO HIDRÁULICO.

O fenómeno da produção é semelhante ao escoamento dum fluido incompressível ao longo dum sistema de condutas e reservatórios como o apresentado na fig. 2.1.

No depósito 1 existe um dado volume de fluido, variável de instante a instante, conforme os caudais de alimentação e drenado. *Dos trabalhos solicitados pela clientela, o estaleiro candidata-se à execução duma parte. A procura e a oferta são variáveis de momento a momento.*

Do fluido que se escoa de 1, parte é aspirada pelas bombas (B11), (B12) e (B13), para o depósito 11. A parte restante é lançada nos depósitos

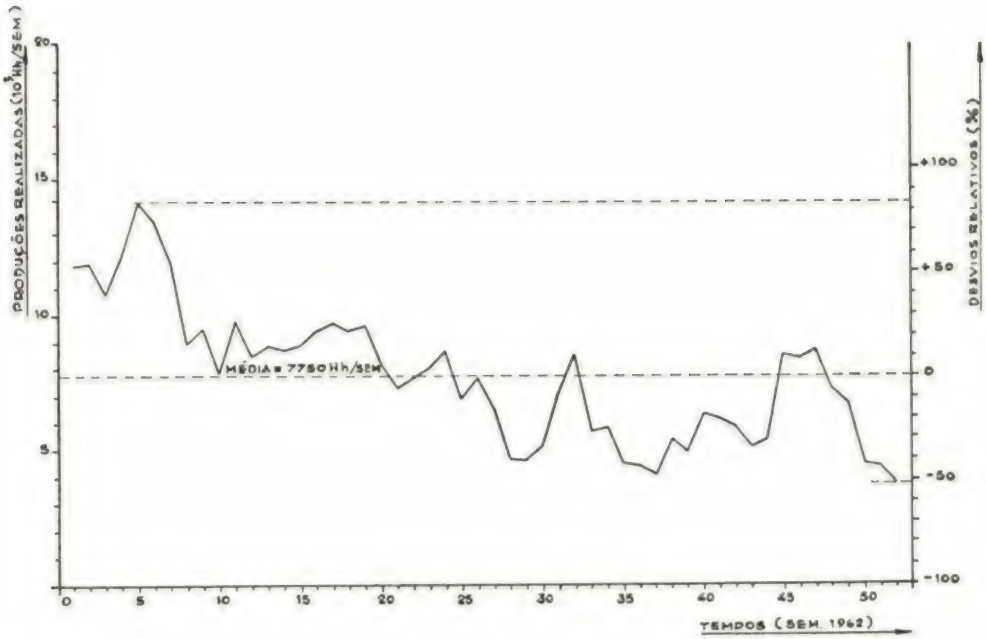


Fig. 1.3 — Em determinada especialidade, a produção da LISNAVE tomou em 1962, semana a semana, os valores indicados. Os desvios relativos são definidos pela escala à direita.

2 e 3, pela bomba (B2). *Parte do trabalho é cancelada pelos clientes, outra adjudicada à concorrência, outra ainda não passa de erro nas previsões feitas. A parte restante é captada pelos Departamentos Técnico-Comerciais, que deverão fornecer orçamentos em relação a uma parcela.* (Na LISNAVE existem actualmente 4 Departamentos Técnico-Comerciais: Novas Construções, Reparações, Obras Terrestres e Obras Internas).

Do fluido lançado no tanque 2, uma parte é aspirada pelas bombas (B11), (B12) e (B13), para o depósito 11. A parte restante passa ao depósito 3. *Dos trabalhos orçamentados os clientes desistem de fazer uns quantos, ou passam as respectivas encomendas à concorrência. Outra fracção corresponde a erros de previsão. Só o que resta, mercê dos contactos estabelecidos pelos Departamentos Técnico-Comerciais, tem probabilidade de vir a ser feito no estaleiro.*

Do depósito 3, o fluido ou se escoa para 11, sob a acção das bombas (B11), (B12) e (B13), ou é aspirado pela bomba (B4). O caudal que segue este caminho é medido no contador (C1). *Por melhores que sejam os contactos estabelecidos pelos Departamentos Técnico-Comerciais, perde-se alguma carga provável. No entanto, muitas encomendas são formalmente confirmadas pela clientela e, nesse momento, avalia-se com precisão razoável o trabalho requerido por cada uma.* A quantidade total de trabalho encomendado ao estaleiro e ainda não feito chama-se *carga absoluta.*

Normalmente o fluido, atravessado (C1), passa ao depósito 4; depois ao depósito 5, sob a acção das bombas (B5) e (B6); depois ao depósito 6, através da válvula (V1); daqui ultrapassa a válvula (V2), impulsionado pela bomba (B7); segue pelo contador (C2) e cai no depósito 8; e é lançado finalmente no depósito 10, pela bomba (B8), através da válvula (V3). Os depósitos 5 e 6 são acumuladores destinados a permitir a regulação da altura e do caudal, tendo em atenção as oscilações de longo período nas condições de funcionamento da bomba (B7). O depósito 7 é uma câmara de equilíbrio, destinada a eliminar as consequências desastrosas para a segurança e rendimento da mesma bomba, resultantes das oscilações bruscas ou de curto período, nas suas condições de funcionamento. *Os trabalhos encomendados não estão em grande parte disponíveis, isto é, não estão prontos a ser executados. Compete ao Departamento de Estudos e à Preparação do Trabalho definir e concatenar todos os elementos que os tornam disponíveis.* É evidente que para tornar os materiais disponíveis é também indispensável a acção dos outros departamentos que intervêm na sua compra.

Um sistema de regulação em cascata, cujos orgãos fundamentais são o Planeamento e o Lançamento, per-

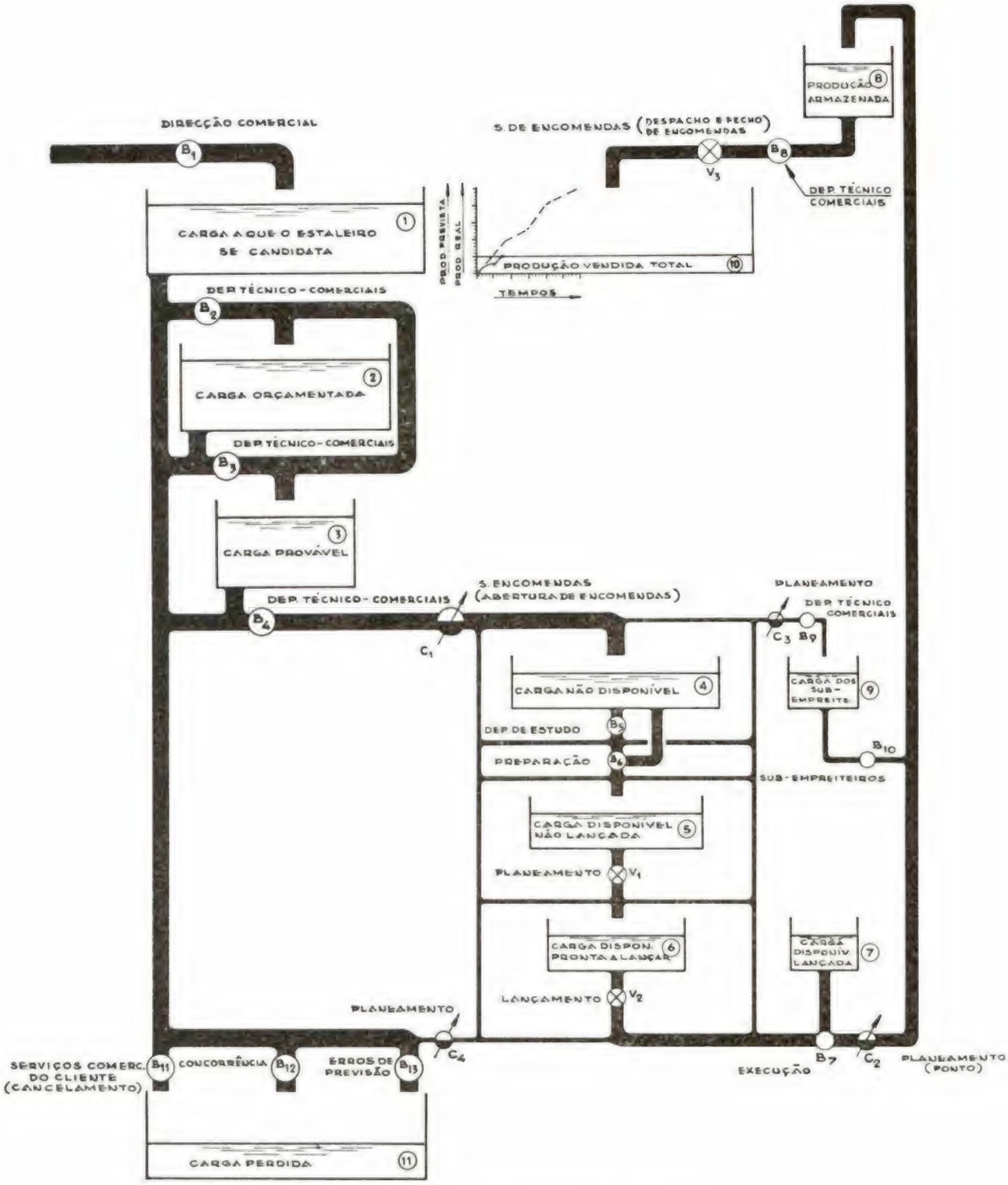


Fig. 2.1 — Modelo hidráulico de produção.

mitem alimentar de maneira conveniente os vários postos de trabalho da Execução. Esta explora o melhor possível os meios de produção de que dispõe, para concluir ràpidamente os trabalhos em curso.

Uma fracção deminuta do caudal que atravessa (C1) vai parar ao depósito 11. *Acontece às vezes que, mesmo depois de encomendado, o trabalho não se faz.*

A bomba (B9) aspira outra fracção daquele mesmo caudal e lança-o no depósito 9. A bomba (B1O) condu-la ao tanque 8 e daqui a bomba (B8) fá-la passar ao reservatório 10, através da válvula (V3). *Em certos casos os Departamentos-Técnico-Comerciais dão trabalhos de sub-empreitada, procurando aumentar o volume de vendas, sem empatar capital em novos meios de produção. É táctica a usar quando os meios do estaleiro estejam saturados, obsoletos ou, simplesmente, não existam.*

Comparando em cada instante os níveis real e previsto do fluido no tanque 10, tem-se uma noção quantitatativa sintética do funcionamento geral do sistema. *Comparando em cada instante as produções vendidas totais reais com as previstas, tem-se uma noção quantitativa sintéticado funcionamento geral do estaleiro.*

2.2 TRANSFORMAÇÃO DA CARGA NÃO DISPONÍVEL EM CARGA DISPONÍVEL.

2.2.1. *Composição da carga absoluta.*

(C1), (C2), (C3) e (C4) permitem calculá-la instantâneamente. Por outro lado, ela é, em cada momento, constituída por 4 parcelas:

.1. *Carga não disponível,* correspondente aos trabalhos para execução dos quais faltam um ou mais elementos necessários, a saber:

- .1. Contrato e/ ou encomenda firme;
- .2. Definição dos trabalhos;
- .3. Desenhos, instruções e/ ou aprovações;
- .4. Materiais;
- .5. Equipamentos, ferramentas e/ ou espaço;

.2. *Carga disponível não lançada,* correspondente aos trabalhos para os quais existem todos os elementos necessários, mas cuja execução ainda não foi ordenada à oficina;

.3. *Carga disponível pronta a lançar,* correspondente aos trabalhos para os quais existem todos os elementos necessários, cuja execução já foi ordenada à oficina, mas que aguarda entrada no primeiro dos postos do trabalho que mobilizam;

.4. *Carga disponível lançada,* correspondente aos trabalhos para os quais já existem todos os elementos necessários, cuja execução já foi ordenada à oficina e que ultrapassaram o primeiro dos postos de trabalho que mobilizam, ou nele se encontram.

As tarefas cuja execução foi indevidamente ordenada, por faltar algum elemento necessário, de maneira nenhuma constituem carga lançada ou pronta a lançar, *mas sim carga não disponível.*

2.2.2. *Departamento de Estudos.*

Tornar disponível com rapidez toda a carga entrada é tarefa do Departamento de Estudos bem como da Preparação de Trabalho, quer esta se processe ao nível estaleiro, quer ao nível secção homogénea ou grupo de secções homogéneas.

Estes Departamentos devem apoiar-se com firmeza nos Departamentos Técnico-Comerciais, desenvolvendo ao mesmo tempo um espírito comercial apurado, não só no sentido de satisfazer técnica e psicològicamente os requisitos da clientela, como de baixar sistemàticamente o custo da produção e aumentar, também de maneira sistemática, a qualidade dos produtos fabricados.

A acção do Departamento de Estudos processa-se em duas fases. Na Sala de Projectos estabelecem-se os desenhos básicos de projecto, incluindo os do conjunto e montagem, com indicação das folgas de funcionamento, de acordo com as especificações contratuais, no que respeita à funcionalidade da máquina concebida, à qualidade dos materiais usados e aos coeficientes de segurança admissíveis. No caso dos materiais terem um prazo de entrega longo, ou serem muito caros, quer por terem preço elevado, quer por serem utilizados em grandes quantidades, a Sala de Projectos deve ainda integrá-los em especificações de compra com o nível técnico necessário e suficiente. Lançada no mercado a respec-

tiva consulta através dos departamentos competentes, cabe também à Sala de Projectos apreciar tecnológica e econòmicamente as propostas dos concorrentes e propor a adjudicação da mais favorável, ao Serviço de Abastecimentos e/ ou ao cliente, se disso for caso.

Na Sala de Desenho desenvolve-se o projecto em desenhos de execução, assinalando as tolerâncias e acabamentos exigidos, bem como a quantidade e a qualidade dos materiais acessórios a empregar.

2.2.3. *Preparação do Trabalho.*

A ideia básica da Preparação do Trabalho é simular antecipadamente no papel as sucessivas fases do fabrico, a fim de se poderem tomar as providências necessárias por estarem disponíveis, a tempo e horas, todos os elementos exigidos por cada uma daquelas fases. Dado que nas diversas encomendas intervêm aleatòriamente um grande número de secções homogéneas, a Preparação do Trabalho central é a única solução lógica para realizar tal simulação. A existência de núcleos de preparação independentes, sob a gerência directa das oficinas, só se admite como processo transitório de treino de pessoal, que se deve acelerar o mais possível. Notar que se admitem delegações junto de certos grupos de secções homogéneas, para tornar expedita a preparação do trabalho *só a elas respeitante* e para facilitar a resposta informativa da oficina. Mas tais delegações ou agências devem constituir departamentos de estado-maior, independentes da hierarquia executiva e dependentes da Preparação Central. Insistimos particularmente neste ponto, porque a Preparação do Trabalho é um dos mecanismos essenciais da Regulação da Produção, competindo-lhe:

.1. Analisar os desenhos e filtrar possíveis falhas do Departamento de Estudos;
.2. Classificar imediatamente os materiais não encomendados pelo Departamento de Estudos, quanto à maneira de os obter, e torná-los disponíveis, isto é:
  .1. Definir os materiais a adquirir fora e encomendá-los;
  .2. Definir os materiais a retirar da reserva de Armazém e afectá-los à encomenda;
  .3. Definir os materiais a executar no estaleiro;
.3. Estabelecer a sequência de trabalho mais aconselhada, («Graphiques de jallonement», v. Ref. 1);
.4. Estabelecer as gamas, definindo os processos operatórios a usar, tanto estandartes como especiais, pelo menos até ao nível posto de trabalho, desde a entrada da matéria prima no estaleiro até à entrega ao cliente;
.5. Estudar e promover a construção de ferramentas especiais e esqueletos de montagem, que se tornem necessários para maior simplicidade e rapidez da execução dos trabalhos;
.6. Definir os tempos necessários às diversas fases de fabrico (tarificação).

Num estaleiro de reparações navais muitas cargas são imediatamente disponíveis ou quase, logo após a encomenda. Fazer peritagens, retirar equipamentos do local, desmontá-los para inspecção, são trabalhos que se podem iniciar prontamente, desde que o navio esteja acessível. O ideal em tais casos é usar gamas estandartes que se refiram, sintèticamente embora, aos pontos do articulado anterior. Deste modo reduz-se ao mínimo a intervenção do preparador, sem prejuízo das vantagens de preparar o trabalho.

2.2.4. *Ordenação.*

A carga disponível deve ser mandada executar de acordo com a potência de produção instantânea. Voltando a usar a linguagem do modelo, diremos que a bomba (B7) trabalhará em condições óptimas se a altura do fluido a montante não variar.

Compete ao Planeamento, segundo mecanismo essencial da Regulação da Produção, tentar conseguir que este nível permaneça constante. Tal como a Preparação de Trabalho, é orgânicamente central e é moda estruturar-se em dois andares:

.1. Planeamento global;
.2. Planeamento oficinal.

O primeiro, que deve ficar junto da Preparação Central, utiliza unidades de tempo não infe-

riores a uma semana e cargas elementares correspondentes no mínimo a sub-conjuntos, blocos prèfabricados, máquinas ou equipamentos. Considera implícitos, claro, todas as parcelas de tempo inferiores a uma semana e todas as parcelas de carga correspondentes a cada peça do sub-conjunto ou bloco de referência.

O Planeamento Oficinal trabalha com peças elementares e dia a dia, devendo funcionar no gabinete dos contramestres e das pessoas que realizam materialmente o lançamento em fabrico. Todavia, por princípio, deve depender orgânicamente do Planeamento Central.

O Planeamente Oficinal é uma ferramenta à disposição da oficina e de modo nenhum deve pear os executantes. Define uma ordem de trabalhos que, se for respeitada, permitirá cumprir as datas estabelecidas no Planeamento Global, mas que os contramestres são livres de acatar ou não: se alcançarem resultados piores, explicarão as razões ao seu chefe hierárquico; se melhores, todos devem ficar satisfeitos.

Esta última hipótese mostra com clareza que um Planeamento Oficinal, assim processado, em que o mecanismo é o cérebro do planificador, quando muito assistido por gráficos e quadros, não conduz necessàriamente à ordenação óptima, tanto mais que o critério de optimização varia de oficina para oficina e com o tempo. Além disso, dada a tendência constante de aceleração dos processos operatórios, é cada vez mais difícil satisfazer por tais meios as condições de resistência a avarias e de elasticidade que se exigem a um bom planeamento, (Ref. 2). Dentro desta ideia, o Planeamento Oficinal chega a materializar-se num autêntico sistema de comandos a distância, que o contramestre manobra para bem conduzir a sua oficina, tendo em conta as indicações dum painel de instrumentos.

Modernamente e com o desenvolvimento da aplicação das técnicas lógico-matemáticas e dos calculadores à Regulação da Produção, a tendência é transformar a estrutura de dois andares num sistema de comunicações e cálculo ultra-rápido: o posto central recebe as informações dos orgãos que aplicam as cargas (Departamentos Técnico-Comerciais, Departamentos de Estudos e Preparação de Trabalho); bem como dos que fornecem a potência de produção (Secção de Pessoal e Execução) e, em face delas, ordena òptimamente as tarefas a efectuar em cada posto de trabalho, recorrendo às técnicas e calculadores acima referidos, (Ref. 3). O Planeamento Oficinal transforma-se num simples canal de comunicações no sentido Planeamento-Central-Oficina e vice-versa.

2.2.5. *Lançamento. Execução.*

As ordens de execução são transmitidas ao operário pelo mecanismo de lançamento. Em regra um pequeno núcleo de funcionários, seguindo as instruções dos encarregados, distribui o trabalho a cada operário, abrindo a respectiva ficha e entregando-lha, juntamente com os documentos informativos requeridos.

Suponhamos que a oficina de máquinas ferramentas rectificou 4 dos 6 munhões dum veio de manivelas. Houve uma produção registada no contador (C 2). No entanto, a obra não pode ainda ser entregue ao cliente, pois há que rectificar os dois munhões restantes. Tudo se passa como se a produção feita tivesse de ficar armazenada (depósito 8, fig. 2.1), à espera do que falta executar. Ao trabalho omisso corresponde uma certa carga disponível lançada. Ora as oficinas tendem a proteger-se contra oscilações bruscas no seu funcionamento com um nível elevado no depósito 7 e, portanto, no depósito 8. Como produção armazenada é sinónimo de capital imobilizado, deve ser vigiada de muito perto, caso contrário provocará perdas sensíveis. Contava M. Wormser que um industrial francês, com fábricas em várias regiões, nas suas visitas da inspecção, percorria as oficinas em conversa amena e, de quando em vez, passava o dedo pelas peças imobilizadas, avaliando pela camada de pó os prejuízos que a produção armazenada lhe estava dando...

3. PRINCIPAIS GRANDEZAS A TER EM CONTA PARA REGULAR SINTÈTICAMENTE A PRODUÇÃO.

3.1. POTÊNCIAS.

Adoptamos para unidade fundamental de produção o Hh, ou seja, o trabalho produzido dentro das tolerâncias tecnológicas, durante 1 hora, por um operário de experiência e instrução médias na função e desenvolvendo uma actividade normal, (Ref. 4).

A produção de que são capazes todos os operários que executam uma função deve ser referida a um dado período de tempo. A experiência aconselha a semana, pelo que mediremos a potência de produção em Hh/sem.

Seja N_{hi} o número de operários inscritos na especialidade h, do início da semana i. Admitindo que todos se apresentavam ao trabalho nessa semana e que, durante ela, desenvolviam uma actividade normal, a sua produção, no horário normal de dia, seria

$$U_{hi} = 48\ N_{hi}\ Hh/sem \tag{3.1}$$

U_{hi} diz-se potência teórica nominal da especialidade h, na semana i. Subtraindo a U_{hi} os Hh/sem perdidos por feriados e licenças com vencimento, obtemos a potência bruta nominal, V_{hi}. Ao quociente

$$\rho_{hi}^{1} = \frac{V_{hi}}{U_{hi}} \tag{3.2}$$

chamamos rendimento de presença bruto.

Subtraindo a V_{hi} os Hh/sem perdidos por faltas e licenças sem vencimentos, determinamos a potência líquida nominal, W_{hi}. Ao quociente

$$\rho_{hi}^{2} = \frac{W_{hi}}{V_{hi}} \tag{3.3}$$

chamamos rendimento de presença líquido.

Os operários podem trabalhar em horas extraordinárias ou noutros turnos que não o normal de dia. Além disso em muitas especialidades há uma percentagem não desprezável de operários polivalentes, capazes de executar as funções doutras especialidades. Obrigar-nos-á isto a considerar a noção mais elaborada de potência líquida corrigida actual da função. De momento, porém, é dispensável tal refinamento.

Ao quociente

$$\rho_{hi} = \frac{W_{hi}}{U_{hi}} = \rho_{hi}^{1}\ \rho_{hi}^{2} \tag{3.4}$$

chamamos rendimento de presença efectivo.

3.2. CARGAS.

Carga absoluta duma especialidade, em certa data, é a produção total que, nessa data, lhe é solicitada pelos clientes. Mede-se em Hh.

Chamemos Q_{hsi} à carga absoluta da especialidade h no início da semana i, tal como é conhecida no início da semana actual, s, (fig. 3.1). Se chamarmos Q_{hsi}^{f} à contribuição da encomenda f para Q_{hsi}, poderemos escrever, por definição

$$Q_{hsi} = \sum_{f} Q_{hsi}^{f} \tag{3.5}$$

Pode definir-se o conceito de carga relativa pelo quociente de Q_{hsi} por W_{hi}, (Ref. 1), mas não o utilizaremos por não ter significado objectivo.

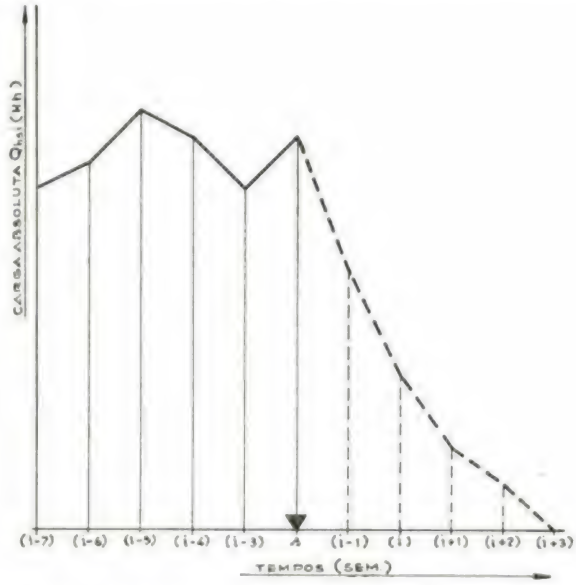


Fig. 3.1 — Se for s a semana actual, os valores da carga absoluta são reais à esquerda e previstos à direita de s.

É evidente que uma parte de Q_{hsi} deverá ser satisfeita na semana i, outra na semana (i + 1), outra na semana (i + 2), etc., (fig. 3.2). À parcela de Q_{hsi}, que deve ser executada na semana $j \geq i$, chamamos carga semanal de especialidade h, na semana j, tal como é conhecida no início da semana actual s. Representemo-la por R_{hsj}. Por definição, teremos

$$Q_{hsi} = \sum_{j=i}^{\infty} R_{hsj} \tag{3.6}$$

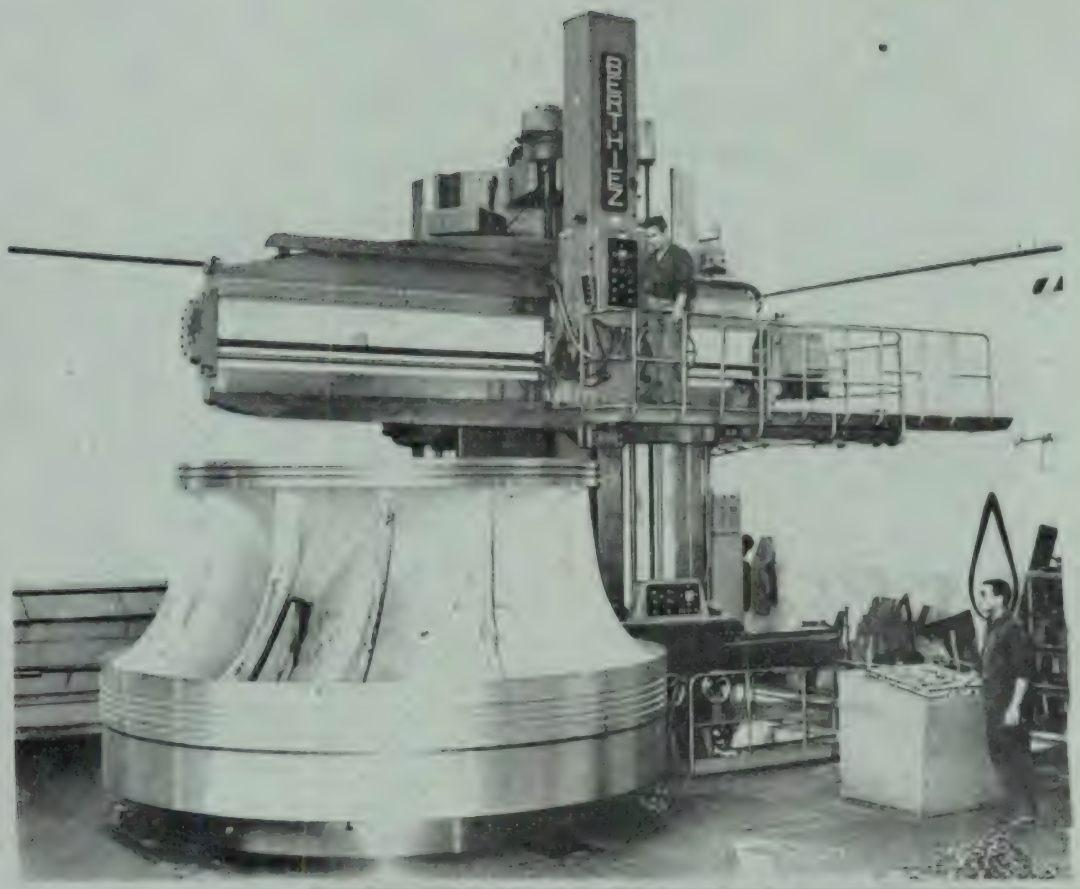
Se chamarmos R_{hsj}^{f} à contribuição da encomenda f para R_{hsj}, será também por definição,

$$R_{hsj} = \sum_{f} R_{hsj}^{f} \tag{3.7}$$

É ainda evidente que

$$Q_{hsi}^{f} = \sum_{j=i}^{\infty} R_{hsj}^{f} \tag{3.8}$$

MAGUE



TORNEAMENTO DE UMA RODA PERTENCENTE A UMA DAS 3 TURBINAS «FRANCIS», DE 120.000 CV, DESTINADAS À CENTRAL DE BEMPOSTA E CONSTRUÍDAS POR CONSTRUÇÕES METALOMECÂNICAS MAGUE, S. A. R. L., SEGUNDO PROJECTO E LICENÇA DE A.C.M. DE VEVEY, S. A.

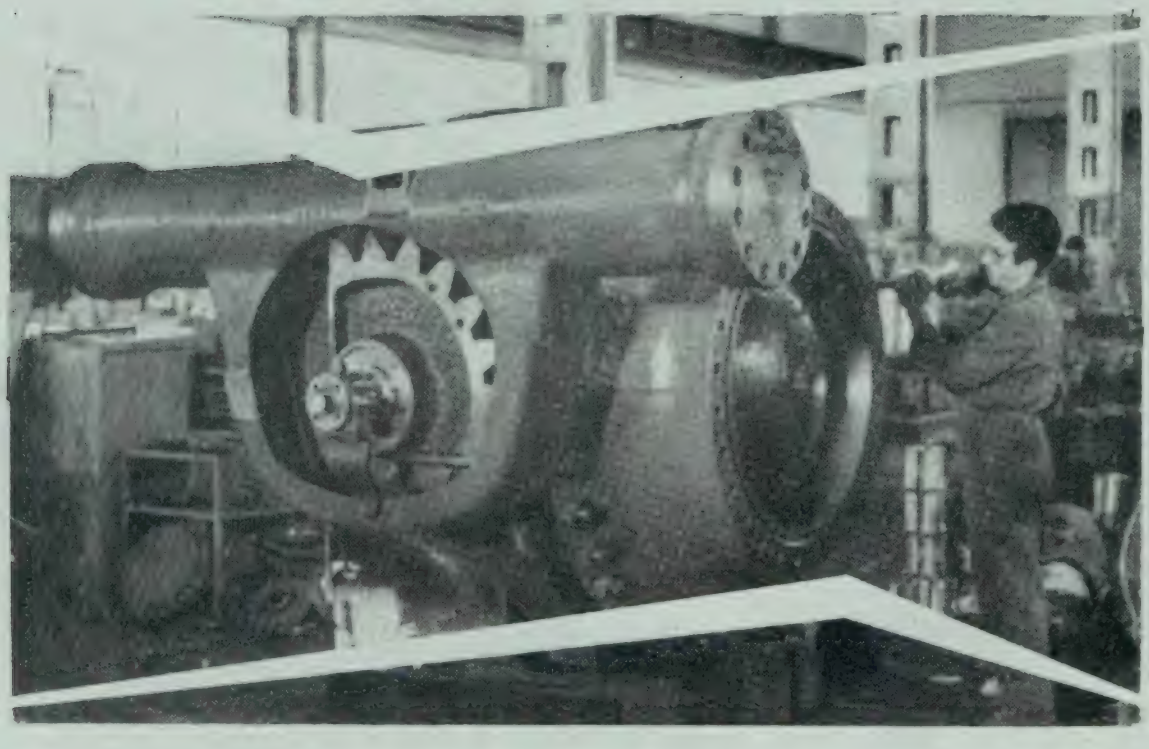
PONTES ROLANTES — *Projecto e fabrico*
GUINDASTES — *Projecto e fabrico*
APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS — *Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS — *Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey*
TURBINAS A VAPOR — *Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie*
EQUIPAMENTOS INDUSTRIAIS

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

aços vazados
ferros meehanite
mecânica MÉDIA E PESADA
construções metálicas

COMPORTAS
TURBINAS
CONDUTAS FORÇADAS
RESERVATÓRIOS SOB PRESSÃO
PERMUTADORES DE CALOR



Centrais Hidráulicas
Válvula Esférica para Lomaum

DIVISÃO METALO-MECÂNICA
COMPANHIA UNIÃO FABRIL

AVENIDA 24 DE JULHO, 170 — LISBOA 2 ✦ TELEFONES 67 04 21 E 67 20 61 ✦ TELEGRAMAS METALOFABRIL

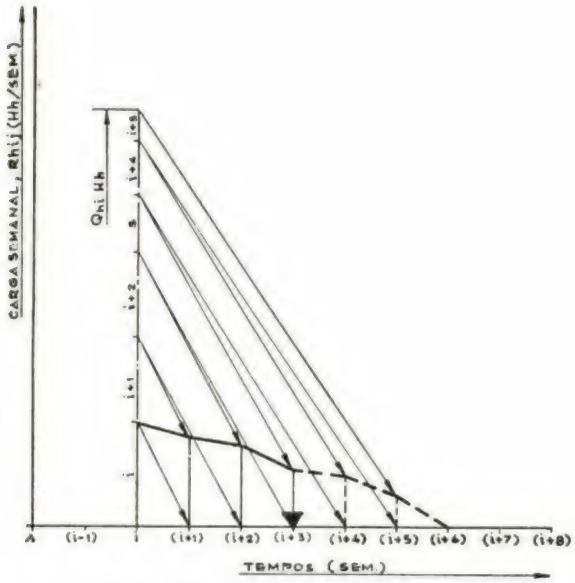


Fig. 3.2 — Se em certa data, actual ou futura, o estaleiro dispõe de todos os elementos para satisfazer uma dada parcela de carga, diz-se que tal parcela está *disponível* nessa data. O critério da disponibilidade é usado na partição da carga absoluta em cargas semanais. Há também que considerar a potência líquida prevista para cada especialidade e o prazo de entrega prometido para cada encomenda.

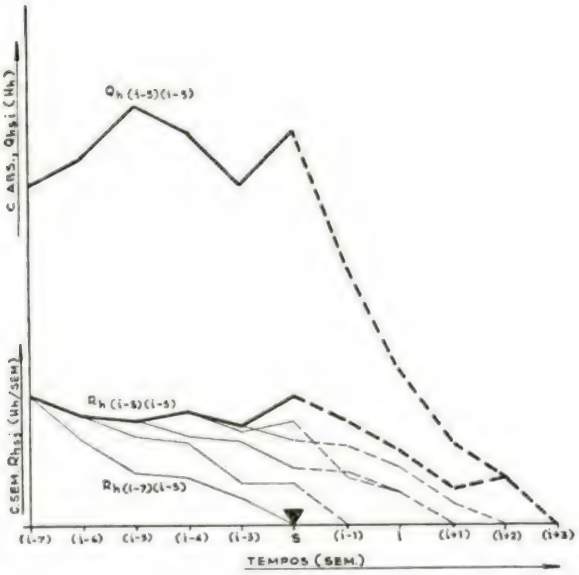


Fig. 3.3 — Se tiver usado exclusivamente o critério da disponibilidade na partição da carga absoluta, a diferença de cotas entre as curvas a traço interrompido grosso, medida em Hh, define a carga absoluta não disponível nas semanas futuras, tal como é conhecida no início da semana actual, s.

As relações (3.6) e (3.8) só têm sentido para o presente e para o futuro e são válidas apenas instantâneamente no início da semana s. A razão está em que parte da carga semanal R_{hss}, porventura não satisfeita na semana s, tem de transitar para uma das semanas seguintes, muitas vezes sem que antecipadamente saibamos qual, (fig. 3.3).

Por outro lado ao longo da semana s, a carga absoluta varia, isto é, em regra $Q_{h(s+1)(s+1)} \neq Q_{hs(s+1)}$ e diferente deverá ser também a respectiva partição.

3.3. PRAZOS.

Um compromisso que figura em todos os contratos é o prazo em que o estaleiro tem de concluir os trabalhos, o qual deve ser contado normalmente a partir da mais tardia das seguintes datas:

. 1 . Confirmação da encomenda e/ ou assinatura do contrato;
. 2 . Definição dos trabalhos;
. 3 . Aprovação dos desenhos pelo cliente, sociedade classificadora e/ ou entidades oficiais;
. 4 . Chegada dos materiais críticos e/ ou navio ao estaleiro.

Suponhamos que na semana s se prevê para a semana $i \geqq s$ o início do prazo, durante o qual a especialidade h deverá satisfazer a encomenda f. Seja $k \geqq i$ a semana em que tal prazo termina. O intervalo de tempo T^f_{hsik}, dentro do qual o estaleiro se pode lògicamente comprometer a executar o trabalho, depende:

— Dos compromissos já assumidos pelo estaleiro, que podem ser definidos pelas cargas semanais da semana i à semana k, tal como já estão previstas na semana s;
— Das potências da especialidade h, da semana i à semana k;
— E do número máximo de operários que se podem pôr a trabalhar na encomenda f, sem diminuição da produtividade normal, e que se pode exprimir por um valor máximo admissível de $R_{hsj}{}^f$. Isto é

$$(3.9) \quad \begin{cases} T^f_{hsik} = T^f_{hsik}\,(R_{hsj},\ W_{hj},\ R_{hsj}{}^f{}_{máx.adm.}) \\ i \leq j \leq k \end{cases}$$

3.4. PRODUÇÕES REALIZADAS.

Seja P_{hi}^f a produção realizada durante uma dada semana i, anterior à actual, pela especialidade h, para satisfazer parte da encomenda f. A produção total realizada nessa semana será naturalmente

$$P_{hi} = \sum_f P_{hi}^f \tag{3.10}$$

e não pode exceder muito a potência líquida nominal:

$$P_{hi} = \Phi_{hi} W_{hi} \tag{3.11}$$

O coeficiente Φ_{hi} é directamente influenciado pela polivalência dos operários e pelas actividades desenvolvidos por cada um deles. O limite superior de Φ_{hi} é 1,50, no nosso estaleiro. Sempre que

$$\frac{\sum_h P_{hi}}{\sum_h W_{hi}} < 1 \tag{3.12}$$

é sinal de que houve desemprego.

A produção total realizada está relacionada também com a carga semanal da semana i, tal como é prevista no início da mesma semana i, R_{hii}:

$$P_{hi} = \Psi_{hi} R_{hii} \tag{3.13}$$

Ψ_{hi} é directamente influenciado pela percentagem da carga R_{hii} que efectivamente está disponível, isto é, pronta a ser executada. Se fôr Ψ_{hi}^f o coeficiente correspondente à encomenda f, é evidente que

$$P_{hi}^f = \Psi_{hi}^f R_{hii}^f \tag{3.14}$$

$$\Psi_{hi} = \frac{\sum_f \Psi_{hi}^f R_{hii}^f}{R_{hii}} \tag{3.15}$$

Mostra a experiência que muito embora o limite inferior de Ψ_{hi}^f seja 0, o limite inferior de Ψ_{hi} é 0,7.

As diferenças

$$\Delta_{hi}^f = P_{hi}^f - R_{hii}^f \tag{3.16}$$

$$\Delta_{hi} = P_{hi} - R_{hii} \tag{3.17}$$

definem os desvios entre a realidade e as previsões. Mostra também a experiência que o valor médio dos desvios Δ_{hi} se pode manter com relativa facilidade abaixo de 10 % e, tomando certas precauções, abaixo mesmo dos 5 %.

3.5. RESULTADOS.

O volume de vendas realizadas nasema na $i \leq s$, G_i, será

$$G_i = \sum_{hf} a_h^f P_{hi}^f + \sum_{hf} \sum \text{preço venda mat.} \times \text{quant. mat. vendida} \tag{3.18}$$

se for a_h^f o preço de venda da produção P_{hi}^f. Notar que se for f uma encomenda a pagar pelo estaleiro, a_h^f é nulo, o mesmo acontecendo ao preço de venda do material.

O custo variável da produção, C_i, será

$$C_i = \sum_{hf} b_{hi} P_{hi}^f + \sum_{hf} \sum \text{preço custo mat.} \times \text{quant. mat. gasta} \tag{3.19}$$

onde b_{hi} é um coeficiente que, na hipótese mais simples, se identifica com a taxa de custos variáveis da secção homogénea correspondente à especialidade h.

O resultado bruto ou margem de rentabilidade (Ref. 5) será naturalmente

$$L_i = G_i - C_i \tag{3.20}$$

No final dum período de exploração, digamos um ano, poderá apurar-se o resultado, Λ:

$$\Lambda = \sum_i L_i - C_o - \text{despesas de venda} \tag{3.21}$$

onde C_o é o custo total fixo da empresa.

3.6. RENTABILIDADE.

Sendo H o capital próprio da empresa, isto é, a soma do capital social, das reservas e dos resultados (não distribuídos, quando positivos), a rentabilidade do negócio pode medir-se por

$$J = \frac{\Lambda}{H} \times 100\ \% \tag{3.22}$$

4. OBJECTIVOS DA REGULAÇÃO DA PRODUÇÃO.

Regular a produção consiste em manobrar permanentemente os meios de producão de que o estaleiro dispõe, por forma a responder da melhor maneira possível a todos os trabalhos que, em cada momento, lhe são solicitados.

Que deve entender-se por *melhor maneira possível ?*

Sob o ponto de vista do estaleiro esta expressão é sinónima de *rentabilidade máxima*, $J_{máx}$.

Eliminadas algumas variáveis intermédias, podemos escrever

$$(4.1) \quad J = \frac{1}{H}\Big[\sum_{hif}(a_h^f - b_{hi})\,P_{hi}^f + \sum_{hf}\sum \text{preço venda mat.} \times \text{quant. mat. vendida} - \sum_{hf}\sum \text{preço custo mat.} \times \text{quant. mat. gasta} - C_o - \text{despesas de venda}\Big]$$

Supondo H fixo, isto é, admitindo que os accionistas desejam arriscar no negócio uma dada quantia H, J será máximo quando

$$(4.2) \quad [C_o + \text{despesas de venda}] \text{ for mínimo}$$

$$(4.3) \quad \Big[\sum_{hf}\sum \Big(\text{preço venda mat.} - \text{preço custo mat.} \times \frac{\text{quant. mat. gasta}}{\text{quant. mat. vendida}}\Big) \times \text{quant. mat. vendida}\Big] \text{ for máximo}$$

$$(4.4) \quad \Big[\sum_{hif}(a_h^f - b_{hi})\,P_{hi}^f\Big] \text{ for máximo}$$

Para cada cliente, melhor maneira possível vimos já que significa satisfação da respectiva encomenda

(4.5) *com trabalho e material de qualidade máxima,*
(4.6) *por um preço de venda mínimo,*
(4.7) *num prazo mínimo.*

A condição (4.2) impõe o constrangimento

$$(4.8) \quad \frac{\sum_h P_{hi}}{\sum_h W_{hi}} \leq 1$$

ou seja a necessidade de, em cada semana i, se disporem as coisas por forma que não haja desemprego, pois este a existir, irá aumentar o custo total fixo, C_o.

(4.8) pressupõe que a produção total, $\sum_h P_{hi}$, foi obtida exclusivamente no horário normal de dia, facto que pode não se verificar. Na realidade, ocorrem com certa frequência situações em que uma especialidade h, com desemprego parcial, é no entanto obrigada a fazer horas extras ou a manter um segundo turno. Por isso mesmo e para efeitos de cálculo, formularemos mais tarde este constrangimento com maior rigor.

A condição (4.3), embora nem sempre se lhe dê a atenção que merece, é muito importante, pois basta dizer que, nas grandes encomendas, os materiais contribuem não raras vezes com mais de 50 % para o custo total.

(4.3) obriga a uma gestão óptima das existências em armazém, para que seja mínimo o preço de custo do material. Isto implica, como é sabido:

. 1 . Um fino senso comercial na compra, para conseguir dos fornecedores as quantidades de material desejadas, com a qualidade tècnicamente aconselhável, pelo preço mais baixo e a sua entrega no momento oportuno;

. 2 . As mais elevadas taxas possíveis de rotação dos capitais empatados em material, pela escolha apropriada dos ciclos de reabastecimento e pela redução das existências em armazém ao mínimo possível.

Em segundo lugar a condição (4.3) impõe a necessidade de manter o quociente

$$(4.9) \quad \frac{\text{quant. mat. gasta}}{\text{quant. mat. vendida}}$$

o mais próximo de 1 que é possível pelo aproveitamento máximo dos materiais ou, o que é o mesmo, pela redução dos desperdícios ao mínimo.

As dimensões da matéria-prima a utilizar dependem de um lado, do que o mercado fornecedor e os armazéns do estaleiro têm disponível, no instante da execução dos trabalhos; e, por outro, dos processos operatórios que se desejem empregar. Isto complica bastante a minimização da fracção (4.9) e impede, pelo menos de momento, que ela seja considerada no método de Regulação Sintética da Produção que estamos apresentando. Não queremos dizer que essa minimização não seja procurada, antes pelo con-

trário somos do parecer que se realize de maneira a cobrir todos os materiais significativos, mas de tal tarefa deve encarregar-se a Preparação de Trabalho e não o Planeamento.

A expressão (4.3) mostra ainda claramente o interesse que tem o estaleiro em vender a maior quantidade possível dos materiais para os quais o parêntesis curvo é muito grande. Do mesmo modo a condição (4.4) exige que se produza o mais possível para encomendas em que $\sum_{hi} (a_h{}^f - b_{hi}{}^f)\, P_{hi}{}^f$ é muito grande. A expressão (4.8) e a necessidade de cumprir os prazos das encomendas são as únicas limitações admissíveis.

Estes dois juízos devem ser premissas duma política de vendas cuja execução compete aos Departamentos Técnico-Comerciais, que vendem a produção do estaleiro.

Admitamos que tal política é seguida «grosso modo». O passo a dar a seguir para satisfazer (4.4), também a cargo dos Departamentos Técnico-Comerciais, é tornar

$$(4.10) \qquad \left[\sum_{hif} a_h{}^f\, P_{hi}{}^f \right]_{máx}$$

Ora o total por que é vendida a produção P^f, igual a $\sum_{hi} a_h{}^f\, P_{hi}{}^f$, não pode em regra crescer além dum limite máximo, dependente do mercado. E, para elevar esse limite, é necessário que o estaleiro ofereça aos clientes uma contrapartida valiosa: qualidade de trabalho ou de material muito superior à dos concorrentes, maiores facilidades de pagamento, prazo substancialmente menor, etc. Resumindo, o aumento de $\sum_{hif} a_h{}^f\, P_{hi}{}^f$, embora sempre de tentar, apresenta em regra sérias dificuldades.

A maneira mais segura de satisfazer (4.4) é pois baixar a parcela $\sum_{hif} b_{hi}\, P_{hi}{}^f$, do custo variável da produção, pela escolha dos processos operatórios mais económicos (Preparação do Trabalho); pela sua execução com a mais alta produtividade (Execução); e pelo *uso pleno e racional de todos os meios de produção disponíveis (Planeamento)*.

Um dos métodos pelos quais nos propomos tornar possível tal uso pleno e racional é a Regulação Sintética da Produção, que ora apresentamos.

Em igualdade de todas as outras condições, (4.4) traduz-se, pois, por

$$(4.11) \qquad \left[\sum_{hif} b_{hi}\, P_{hi}{}^f \right]_{min}$$

Mais tarde e para efeitos de cálculo, exprimimos esta condição de maneira formalmente diferente e com maior rigor.

Passemos às condições impostas pela consideração do ponto de vista do cliente. A primeira, qualidade máxima do material e do trabalho, escapa à acção directa do Planeamento e, portanto, não será aqui considerada.

A segunda, preço de venda mínimo, é de certo modo contraditória com (4.10), mas a resolução do problema compete aos Departamentos Técnico-Comerciais. É porém perfeitamente compatível com a condição (4.11), que tomaremos como equivalente.

A terceira condição pode exprimir-se deste modo: seja i_x a semana em que se iniciou a execução da encomenda e k_x a semana em que ela se concluiu. O prazo real em que f se executou é $(k_x - i_x)$ e o cliente pretende normalmente que seja

$$\left\{ \begin{array}{ll} (4.12) & (k_x - i_x)_{min} \\ (4.13) & k_x \leq k_0 \end{array} \right.$$

sendo k_0 a semana de entrega inicialmente fixada.

É claro que só por mero acaso não significativo as condições (4.11) e (4.12) podem ser satisfeitas simultâneamente. Com efeito, o número de hH de presença para satisfazer uma dada encomenda f está ligado com o prazo real conseguido, sensìvelmente como se indica na fig. 4.1.

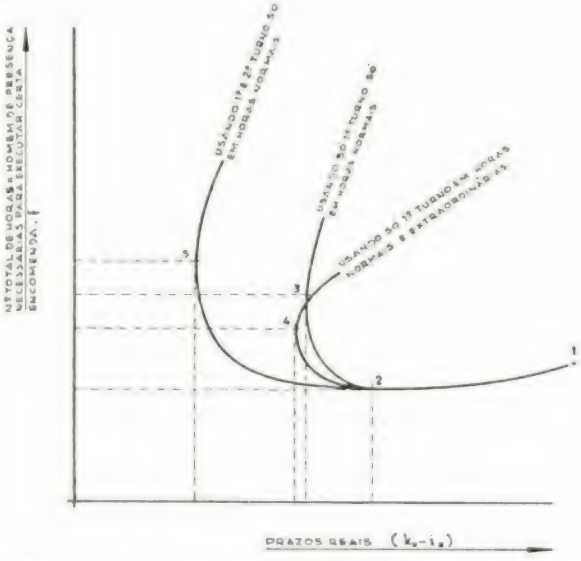


Fig. 4.1 — A produtividade baixa acentuadamente se se exageram as horas extraordinárias.

Aplicando à satisfação da encomenda um determinado efectivo, exclusivamente no horário normal de dia (1.º turno), o prazo e os hH gastos são definidos pelo ponto 1.

Reforçando esses efectivos poderemos provàvelmente melhorar a produtividade (baixa nos hH) e diminuir o prazo, até atingirmos o ponto 2. A partir daí, para encurtar $(k_x - i_x)$, várias soluções se nos deparam como, por exemplo:

— Continuar a reforçar o efectivo, mantendo-o a trabalhar em horas normais no 1.º turno, (aliás com imediato prejuízo da produtividade), e o mínimo prazo que podemos obter é definido pelo ponto 3;

— Ou adoptar um regime de hora extras, e chegamos ao ponto 4;

— Ou utilizar dois turnos de trabalho, no respectivo horário normal, hipótese em que podemos ir até 5.

Transformando em custos as horas de presença gastas, obtemos a fig. 4.2, na qual se vê claramente que o custo mínimo (ponto 2) não coincide com nenhum $(k_x - i_x)$ mínimo, qualquer que seja o regime escolhido.

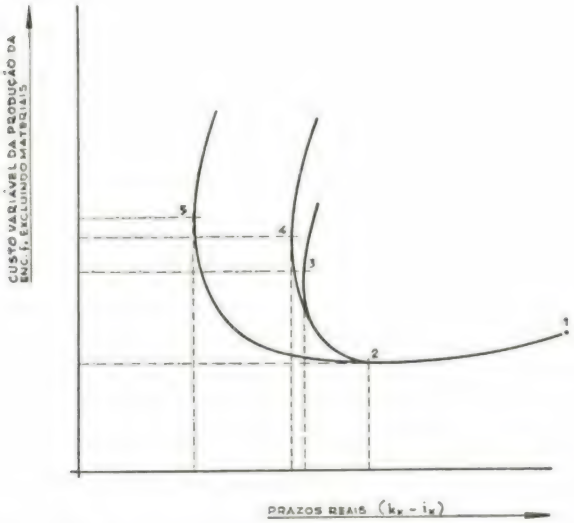


Fig. 4.2 — Recorrendo ao 2.º turno podem obter-se prazos de entrega muito menores, com um ligeiro aumento do custo (supondo constante a incidência dos gastos gerais sobre todas as horas de presença normais, qualquer que seja o turno em que são feitas).

Isto é, impor a simultaneidade de (4.11) e (4.12) torna pràticamente impossível o problema.

Substituiremos pois (4.12) pela condição

(4.14) $(k_x - i_x)$ *compatível com* (4.11)

o que significa considerarmos óptima a solução correspondente ao ponto 2 da fig. 4.2. Para determinação deste ponto basta considerar (4.11), dispensando-se qualquer outra expressão matemática.

A condição (4.13), exigindo que o intervalo de variação admissível para k_x seja fechado à direita, define uma ligação semi-rígida para cada encomenda f. Mas esta ligação resultou dum ponto de vista do cliente e é bom não esquecer qu eele adopta normalmente um princípio óbvio: o estaleiro, na utilização dos respectivos meios de produção, deve dar prioridade absoluta à «*sua*» encomenda.

Na realidade, o estaleiro, que tem de servir todos os clientes o melhor que sabe e pode, é forçado de vez em quando a violar algumas das condições (4.13). Quais? Naturalmente aquelas de cuja violação resulte o prejuízo global mínimo para toda a gente. Será pois esta a condição pela qual substituiremos (4.13). Vejamos como.

O prazo inicialmente contratado, $(k_o - i_o)$, é ajustado entre o estaleiro e o cliente, em conjunto com o preço de venda, sob a pressão da concorrência. O negociador que representa o estaleiro considera o ajuste aceitável com base numa previsão feita na semana $s_o \leq i_o$, das conjunturas que o estaleiro vai enfrentar de i_o a k_o, e atentendo ao volume e interesse do negócio f.

Contudo as conjunturas reais que se apresentam de i_o a k_o podem ser algo diferentes das previstas e é possível que tenha de ser

$$\begin{cases} i_x \neq i_o & (4.15) \\ k_x \neq k_o & (4.16) \end{cases}$$

Se o estaleiro consegue concluir a encomenda f antes da data de entrega contratada, isto é, se

$$k_x < k_o \qquad (4.17)$$

não há dúvida que beneficia de certas vantagens em relação à encomenda f, as quais definiremos mais tarde.

Em contrapartida, se só acaba o trabalho depois da data inicialmente prometida, isto é, se

(4.18) $$k_x > k_o$$

sofre certos prejuízos em relação a f.

Se conseguirmos homogeneizar aqueles benefícios e estes prejuízos, uns e outros em grande parte subjectivos, o que acabamos de dizer pode-se representar sintèticamente como se indica na fig. 4.3.

Podemos além disso convencionar que $\pi^f{}_{sk_o\, k_x}$ é um custo fictício adicionável ao custo real $\sum_{hi} b_{hi}\, P_{hi}{}^f$, e então as duas condições (4.11) e (4.19), a satisfazer simultâneamente, podem reduzir-se a uma só, mais geral:

(4.20) $$[\sum_{hif} (b_{hi}\, P_{hi}{}^f + \pi^f{}_{sk_o\, k_x})]\ min$$

Todas as expressões de (3.18) a (4.20), inclusivè, têm sentido apenas em relação ao passado.

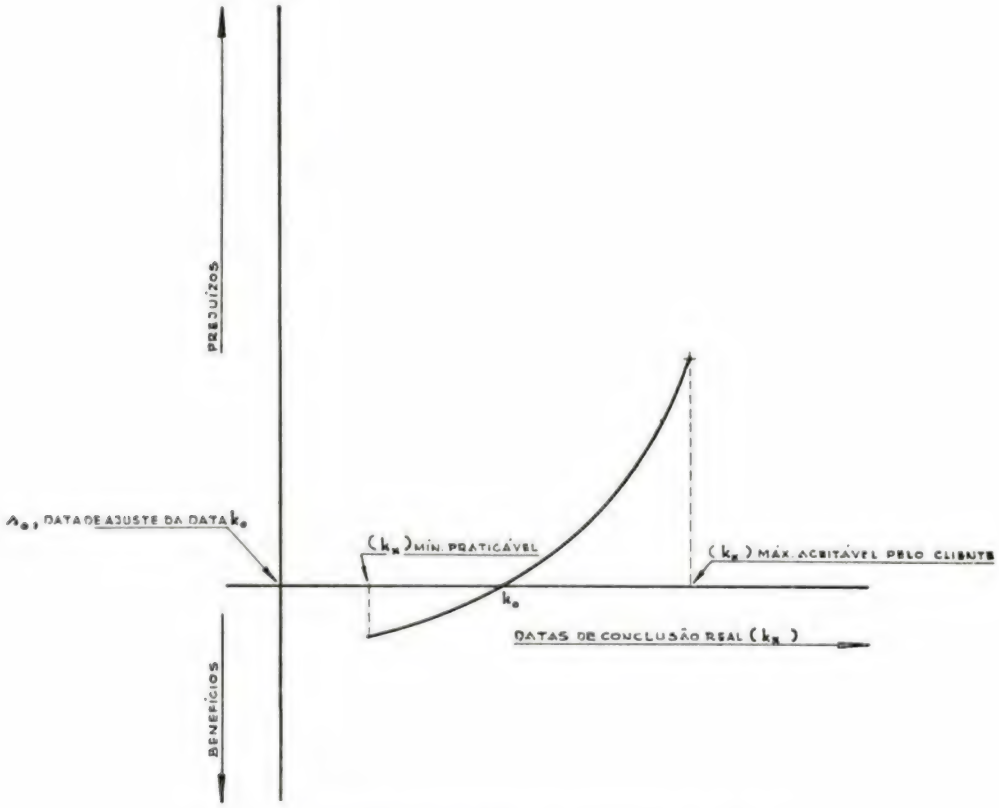


Fig. 4.3 — Benefícios e prejuízos que resultam de $k_x \neq k_o$.

Suponhamos que a variável homogénea representativa dos prejuízos e benefícios se mede em escudos, chamemos-lhes penalidade, representemo-la por $\pi^f{}_{sk_o\, k_x}$ e tomemo-la como positiva quando refira prejuízos e negativa quando represente benefícios. $\pi^f{}_{sk_o\, k_x}$ será analìticamente definida mais tarde em termos dum novo conceito, prazo razoável, mas de momento não é preciso mais. A condição pela qual nos propomos substituir (4.13) escrever-se-á

(4.19) $$(\sum_f \pi^f\, sk_o\, k_x)\ mín$$

Se se verificarem as condições (4.8) e (4.20) diremos que a produção *foi* bem regulada, mas é evidente que essa conclusão tem um interesse muito relativo.

O que importa é prever. O que convém é decidir com acerto, no momento actual, a aplicação a dar aos meios de produção do estaleiro, nas semanas mais próximas.

Ora entre o instante em que um responsável toma uma decisão e o momento em que esta começa a ser executada por quem de direito, decorre um intervalo de tempo cuja grandeza

depende da complexidade e da dificuldade das tarefas preparatórias da execução. É evidente, porém, que qualquer que seja este intervalo, mas tanto mais quanto maior ele for, é inconveniente alterar constantemente as decisões tomadas, sobretudo se dizem respeito a meios de produção de exploração cara.

Quer dizer, as decisões quanto ao futuro devem ser as melhores possíveis — para que se não lhe descubram mais tarde consequências decididamente inconvenientes; e, além disso, devem basear-se em previsões eficazes — para que também mais tarde a realidade as não desminta, e portanto torne falsas as premissas daquelas decisões.

Estabelecemos por um lado as condições (4.8) e (4.20) como definidoras da solução óptima. Por outro lado, vimos já que, se pensarmos em relação ao futuro, podemos substituir as produções realizadas pelas cargas semanais, com erros totais médios inferiores a 10 % e, tomando certas precauções, inferiores mesmo a 5 %, (v. (3.16) e (3.17)).

Conclusão:

Regular a produção de maneira óptima consiste em manobrar permanentemente os meios de produção de que o estaleiro dispõe, por forma a minimizar a função económica prevista

$$F = \sum_{hjf} (b_{hj} R_{hsj}{}^{f} + \pi^{f}{}_{sk_0\, k_x}) \tag{4.21}$$

sem que haja desemprego no momento actual, isto é, mantendo

$$\frac{\sum_{hf} R_{hss}{}^{f}}{\sum_{h} W_{hs}} \geqq 1 \tag{4.22}$$

O custo unitário variável da produção b_{hj} calcula-se dividindo o custo total das horas de presença previstas para a semana j, pela potência líquida correspondente. $\pi^{f}{}_{sk_0\, k_x}$ é a penalidade que na semana s se prevê resulte do facto da encomenda f ser satisfeita na semana k_x, em vez de o ser na semana k_0, inicialmente contratada.

(Continua)

ABSTRACT

Two methods may be used to control the production, both alone or simultaneously. They are called analytical and synthetic methods.

The first one consists of preparing previously all the work to be performed, so the execution orders to each craftsman be given by means of a job ticket, with an allowed time on. The best sequence of all the jobs, required by a client's order, is then established. As this as been made for all the orders, the responsible for the production is able to allow for the proper charge of each trade, week after week, taking into consideration the number of available men and machines, and the maximum rentability principle. That is to say, the charge of each mean of production is calculated by an integration process, from values established after a comprehensive and extensive analysis of the work to be made.

The synthetic method uses a derivation process, applied to integral values of certain variables, without the previous and detailed preparation of all the jobs.

The synthetic method is less precise than the analytical one, but easier and faster, so integral decisions, really important for the good running of the business, may be made quite sooner. Its use seems to be recommended in firms which receive large orders at a short notice, as it happens in the shiprepairing industry. For new building work, with large delivery delays and specially when the orders are normally of the same type, the analytical method seems to be the best one. As a matter of fact the two methods are complementary and may be used simultaneously in the same firm, the synthetic one for the basic and integral production control, the analytical one for the fine and partial production control.

The main variables to be considered in relation to the synthetic control of a shipyard production are presented. Then the author makes the deduction of an economical fonction, F, whose conditioned minimisation defines the concept of optimal production control.

Different general policies to run a shipyard are discussed, as well as the primary conditions to be satisfied on market studies and researches, so these may be a solid basis of a sales program. Sales programs are the point of departure of syntethic production control.

Relevant characteristics of ships, tradicionally built and repaired in a certain shipyard, are reviewed. Taking this shipyard as an example, the author analyses the variables to be considered syntethic on production control and establishes their proper analytical expressions. The optimal distribution problem, of craftsmen able to perform more the one fonction, is given a special attention.

As a consequence of this analysis, the analytical expressions of the economical fonction terms are explicitly defined.

SIMPÓSIO INTERNACIONAL SOBRE O COMPORTAMENTO DO BETÃO SUJEITO À ACÇÃO DA ÁGUA DO MAR

A Reunião Internacional dos Laboratórios de Ensaio de Materiais — RILEM e a Associação Internacional Permanente dos Congressos de Navegação — AIPCN, vão realizar de 24 a 26 de Maio, de 1965 o Simpósio acima indicado, cujas línguas oficiais serão o inglês, francês e italiano.

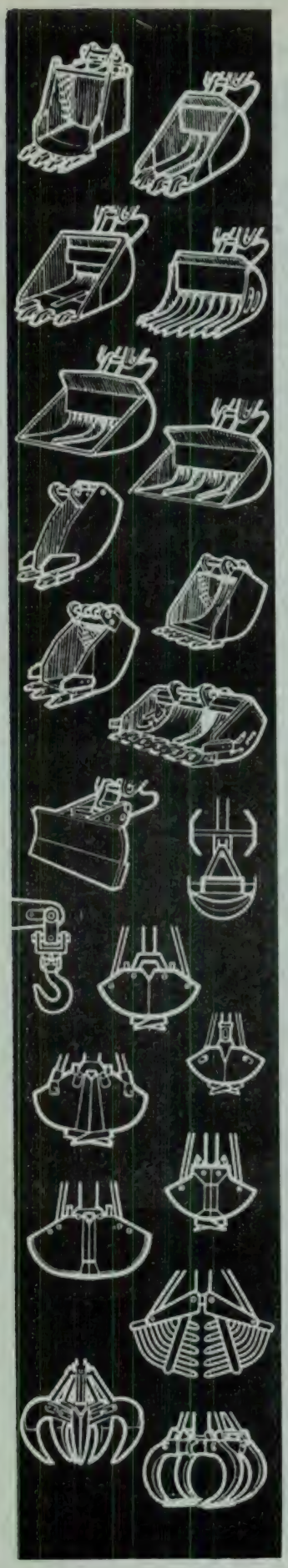
Esta reunião que terá lugar na cidade de Palermo, na Itália, tratará os seguintes temas:

Tema 1 — Características dos constituintes. Composição, aditivos

Tema 2 — Fabrico e colocação em obra

Tema 3 — Instruções e recomendações sobre a construção. Observações experimentais «in situ».

Tanto as comunicações como os respectivos sumários deverão ser enviados, respectivamente até 31 de Janeiro de 1965 e 30 de Novembro de 1964 para Symposium RILEM — AIPCN Istituto di Scienza delle Costruzioni — Facoltá di Ingenieria — Via Maqueda, 175 — Palermo — Itália.



Poclain T.Y. 45

Escavadora-Retro Escavadora-Grua

- POTÊNCIA AUMENTADA
- ROTAÇÃO TOTAL E CONTÍNUA
- ESTABILIDADE 100 %
- 20 BALDES DIFERENTES

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS

Sociedade de Mecanização Industrial e Agricola, S. A. R. L.
Avenida Padre Manuel da Nóbrega, 8-B-1.º — LISBOA
Telefone: 72 40 53 / 4 / 5

SMEIA

ESTAMPARIAS TINTURARIAS LAVANDARIAS

PARA OS VOSSOS TECIDOS TECNICOS:
TRANSPORTADORES MANKONS, LAPPING, WOLFRIES.
FLANELAS, CANEVAS, ETC.,

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

Consultem:

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52093—52094
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

FLUIDO E MASTIC

IMPERMEABILIZAÇÕES

TORNA TUDO ESTANQUE

Impermeabilização e vedação perfeita de:

Terraços, Empenas, Algerozes, Clarabóias,
Paredes húmidas, Coberturas, Fendas,
Juntas de dilatação, etc., etc.

Fácil aplicação — Elasticidade excepcional
Não endurece nem apodrece

ROOFATEX **À base de borracha + alumínio**

Reforça a acção impermeabilizante do «Rubio», dando às construções um aspecto agradável — Protege todos os materiais contra a humidade, a ferrugem e a corrosão

RUBIO E ROOFATEX dois produtos que se completam

Representante exclusivo: Orlando Fernandes

Rua Palmira, 46-A-B-C — LISBOA-1 — Telefs. 83 01 63 - 84 26 39 — End. teleg. «ORFER»

C. D. U. 534.111

VIBRAÇÕES FORÇADAS DE SISTEMAS NÃO LINEARES COM ELASTICIDADE DO TIPO $k(x \pm \varepsilon x^3)$

Pelo Eng.º Mec. (I. S. T.)
JORGE NEVES DA SILVA
(Assistente no I. S. T.)

(Conclusão)

RESUMO

Apresentam-se alguns métodos para o estudo das amplitudes de oscilação de sistemas com um grau de liberdade, não amortecidos, do tipo Duffing, perturbados por forças sinusoidais circulares e elípticas.

2.2.3 Método energético

Neste método propõe-se uma solução com os parâmetros a definir que, por considerações físicas, nos pareça aceitável. Procura-se ajustar a solução proposta de modo a garantir o acerto da equação energética em $(n+1)$ pontos escolhidos criteriosamente obtendo-se assim um sistema de n equações em função dos n parâmetros.

No caso em estudo, e retomando a equação (17), virá para equação energética entre dois pontos P_0 e P_i

$$\left[\frac{\dot{x}^2}{2\,\omega_0^2} + \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^4}{4}\right]_{P_0}^{P_i} = \int_{P_0}^{P_i} \Delta_0 \cos \nu t \; dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (34)$$

Uma vez que não é em geral possível conhecer a verdadeira solução de (17) contorna-se a dificuldade oferecendo uma função que satisfaça a equação (34) em $(n+1)$ pontos. Não se trata portanto de um ajustamento, mas simplesmente de uma escolha de parâmetros de modo a forçar a adaptação. Note-se que a escolha dos pontos P_i implica que, substituidos os valores das suas coordenadas em (34), se obtenham n equações independentes. Por outro lado, se um critério de mínimo desvio quadrático indicaria posições óptimas para os $(n+1)$ pontos, o facto de tal ser pràticamente irrealizável obriga-nos a dispô-los intuitivamente e de acordo com os resultados dos métodos anteriormente expostos, de modo a que cada um evidencie o melhor possível cada parâmetro.

A equação (17) é de elasticidade anti-simétrica e, portanto, em face dos conhecimentos anteriores, fixar-nos-emos em soluções simétricas da forma

$$x = \sum_{i=0} x_{2i-1} \cos (2i-1)\nu t$$

normalmente com um número de termos finito, embora uma das soluções adiante oferecidas seja representável por uma série de infinito número de termos. Também, pelos motivos atrás expostos basta escolher os $(n+1)$ pontos no percurso de 1/4 de período de oscilação $\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)$.

2.2.3.1 Solução simplificada $x = x_0 \cos \nu t$

Esta solução oferecida, afectada de um único parâmetro (x_0), obriga a definir sòmente dois pontos. Sejam P_0 $(\nu t = 0;\ x = x_0;\ \dot{x}_0 = 0)$ e P_i $(\nu t = \frac{\pi}{2};\ x = 0;\ \dot{x} = \nu x)$ esses pontos. Substituindo em (34)

e integrando, vem

$$(1-c^2)\, x_0 \pm \frac{1}{2}\, x_0^3 - \Delta_0 = 0 \tag{35}$$

Fàcilmente se verifica que a aproximação é grosseira. Se em vez de P_0 se escolher P_0' $\left(\nu t = \frac{\pi}{4};\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x_0;\ \dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, \nu\, x_0\right)$ vem

$$(1-c^2)\, x_0 \pm \frac{1}{4}\, x_0^3 - \Delta_0 = 0 \tag{35'}$$

Melhor ainda se se escolher P_0 e P_0', pois neste caso

$$(1-c^2)\, x_0 \pm \frac{3}{4}\, x_0^3 - \Delta_0 = 0 \tag{35''}$$

expressão obtida pelo método de Duffing (21).

Este primeiro exemplo mostra a vantagem da escolha criteriosa dos pontos.

2.2.3.2 Solução $x = x_1 \cos \nu t + x_3 \cos 3\nu t$

Mais elaborada que a anterior, necessita de 3 pontos para definir os seus dois parâmetros (x_1 e x_3).

Tomando

$$\begin{cases} P_0 : \ \nu t = 0\ ; & x = x_1 + x_3 \quad ; \quad \dot{x} = 0 \\ P_1 : \ \nu t = \frac{\pi}{3}\ ; & x = \frac{1}{2}\, x_1 - x_3\ ; \quad \dot{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\, \nu\, x_1 \\ P_2 : \ \nu t = \frac{\pi}{2}\ ; & x = 0 \quad ; \quad \dot{x} = -\nu\, x_1 + 3\nu\, x_3 \end{cases}$$

e substituindo em (34), vem

— entre P_0 e P_1 :

$$(1-c^2)\, x_1^2 + 4\, x_1\, x_3 \pm \frac{2}{3}\left[(x_1+x_3)^4 - \left(\frac{1}{2}\, x_1 - x_3\right)^4\right] - \Delta_0\, x_1 - \frac{9}{2}\, \Delta_0\, x_3 = 0$$

— entre P_0 e P_2 : (36)

$$(1-c^2)\, x_1^2 + (1-9c^2)\, x_3^2 + 2\,(1+3c^2)\, x_1\, x_3 \pm \frac{1}{2}\,(x_1+x_3)^4 - \Delta_0\, x_1 - 3\,\Delta_0\, x_3 = 0$$

O sistema (36) permite determinar x_1 e x_3 para cada par (Δ_0, c).

2.2.3.3. Solução $x = x_0\, \mathrm{cn}\,(u/\mu)$ ou $x = x_0\, \mathrm{sn}\,(u/\xi)$

Oferece-se esta solução porque corresponde ao movimento do sistema livre, e porque possui como o anterior dois parâmetros por definir (x_0, e μ ou ξ). Os pontos P_i escolheram-se, ùnicamente por facilidade de cálculo, em $u = 0$, $u = \frac{K}{2}$ e $u = K$.

Para os sistemas duros será $\frac{\ddot{x}}{\omega_0^2} + x + x^3 = \Delta_0 \cos \nu t$, e $x = x_0 \operatorname{cn}(u/\mu)$

$$\begin{cases} P_0: & u = 0\,; \quad x = x_0 & ; \quad \dot{x} = 0 \\ P_1: & u = \frac{K}{2}\,; \quad x = \frac{(1-\mu)^{1/4}}{[1+(1-\mu)^{1/2}]^{1/2}}\, x_0\,; & \dot{x} = -\frac{(1-\mu)^{1/4}}{[1+(1-\mu)^{1/2}]^{1/2}}\, \nu \frac{2K}{\pi}\, x_0 \\ P_2: & u = K\,; \quad x = 0 & ; \quad \dot{x} = -(1-\mu)^{1/2}\, \nu \frac{2K}{\pi}\, x_0 \end{cases} \qquad [3, \text{pág. } 16]$$

tendo em consideração que $u = \frac{K}{2\pi}\nu t$, que $\operatorname{dn}\frac{K}{2} = (1-\mu)^{1/4}$ e que $\operatorname{dn} K = (1-\mu)^{1/2}$.

Substituindo em (34) e tendo em conta os desenvolvimentos em série de Fourier de cn u e dn u [3, pág. 13] vem

— entre P_0 e P_1:

$$1 + \frac{1}{2}\,\frac{1+2\,(1-\mu)^{1/2}}{1+(1-\mu)^{1/2}}\, x_0^2 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1-\mu)^{1/2} c^2 = \\ = \frac{2K}{\pi}\,\frac{1+(1-\mu)^{1/2}}{\mu^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\,\frac{q^{1/2}}{1+q} + 3\,\frac{q^{3/2}}{1+q^3} + \frac{10}{3}\,\frac{q^{5/2}}{1+q^5} + \dots\right) \frac{\Delta_0}{x_0}$$

— entre P_0 e P_2:

$$1 + \frac{1}{2}\, x_0^2 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1-\mu)\, c^2 = \frac{2K}{\pi}\,\frac{1}{\mu^{1/2}} \left(\frac{q^{1/2}}{1+q} + 3\,\frac{q^{3/2}}{1+q^5} + \frac{5}{3}\,\frac{q^{5/2}}{1+q^5} + \dots\right) \frac{\Delta_0}{x_0} \qquad (37)$$

Para os sistemas macios, $\frac{\ddot{x}}{\omega_0^2} + x - x^3 = \Delta_0 \sin \nu t$, supondo portanto a perturbação sob a forma de seno para evitar que a solução venha desfasada de K, a solução oferecida será $x = x_0 \operatorname{sn}(u|\xi)$

$$\begin{cases} P_0: & u = 0\,; \quad x = 0 & ; \quad \dot{x} = \nu \frac{2K}{\pi}\, x_0 \\ P_1: & u = \frac{K}{2}\,; \quad x = \frac{1}{[1+(1-\xi)^{1/2}]^{1/2}}\, x_0\,; & \dot{x} = \frac{(1-\xi)^{1/2}}{[1+(1-\xi)^{1/2}]^{1/2}}\, \nu \frac{2K}{\pi}\, x_0 \\ P_2: & u = K\,; \quad x = x_0 & ; \quad \dot{x} = 0 \end{cases} \qquad [3, \text{pág. } 16]$$

e em vez de (37) temos

— entre P_0 e P_1:

$$1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+(1-\xi)^{1/2}}\, x_0^2 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 c^2 = \frac{2\pi}{K}\,\frac{1+(1-\xi)^{1/2}}{\xi^{1/2}} \left(\frac{1}{2}\,\frac{q^{1/2}}{1-q} - \\ - \frac{5}{3}\,\frac{q^{5/2}}{1-q^5} \pm \dots\right) \frac{\Delta_0}{x_0}$$

— entre P_0 e P_2:

$$1 + \frac{1}{2}\, x_0^2 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 c^2 = \frac{2\pi}{K}\,\frac{1}{\xi^{1/2}} \left(\frac{q^{1/2}}{1-q} - 3\,\frac{q^{3/2}}{1-q^3} + \frac{5}{3}\,\frac{q^{5/2}}{1-q^5} \pm \dots\right) \frac{\Delta_0}{x_0} \qquad (37')$$

Os sistemas de equações (37) e (37′) permitem obter os parâmetros x_0 e μ ou ξ a partir de pares de valores Δ_0 e c.

2.2.4. Método de Ritz-Galerkin

Este método é semelhante ao que se descreveu em 2.2.3, diferindo no cálculo dos parâmetros da solução proposta. Enquanto que no método energético se procura determinar os n parâmetros escolhendo criteriosamente (n + 1) pontos onde se verifique a equação energética, nesta procura-se ajustar a função oferecida empregando um critério que consiste em minimizar um certo integral de integrando variável, utilizando portanto o cálculo das variações:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}\left(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, t\right) dt = \text{mínimo} \tag{39}$$

Supõe-se que a solução aproximada toma a forma

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i(t) \tag{40}$$

na qual $\psi_i(t)$ são funções arbitradas e a_i são os n parâmetros a definir. Se $\tilde{x}(t)$ fosse a solução exacta ($\tilde{x}(t) = x(t)$) e a equação diferencial (17) viria

$$E = \frac{\ddot{x}}{\omega_0^2} + x \pm x^3 - \Delta_0 \cos \nu t = 0$$

mas com a solução (40) fica

$$\tilde{E} = \frac{\ddot{\tilde{x}}}{\omega_0^2} + \tilde{x} \pm \tilde{x}^3 - \Delta_0 \cos \nu t \neq 0 \tag{41}$$

De acordo com o princípio de Hamilton se compararmos vários percursos virtualmente possíveis para um sistema dinâmico conservativo num intervalo de tempo ($t_1 - t_0$), o integral no tempo do potencial cinético (T — V) é estacionário para um certo e determinado percurso.

Esse percurso é o que será efectivamente percorrido pelo sistema, isto é, entre percursos virtualmente possíveis, é o percurso real [8].

Apoiado na validade deste princípio, Ritz (*) determinou os coeficientes a_i de modo a minimizar (39). Assim, para que (39) seja mínimo é condição necessária que

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

uma vez que, substituindo (40) e $\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \psi'_i(t)$ em (39), vem $I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

A condição de suficiência implicaria o conhecimento das derivadas de ordem superior, operação bastante trabalhosa e em geral dispensável pelo conhecimento físico do problema.

Pelo cálculo das variações e tendo em atenção (42)

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{x}} \psi_i(t) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{x}}} \psi_i'(t) \right] dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(*) No método costuma associar-se o nome de Galerkin, embora este autor tenha apresentado o seu trabalho seis anos depois de Ritz, em 1915, por via independente [10].

e integrando por partes o 2.º termo entre parêntesis rectos

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{x}} \psi_i(t) \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{x}}} \right) \right] \psi_i(t)\, dt = 0$$

Escolhendo os limites t_0 e t_1 de modo que o primeiro termo do segundo membro seja nulo (basta que $\psi_i(t_0) = \psi_i(t_1) = 0$ para todos os $i = 1, 2, \ldots, n$ embora não seja condição necessária), vem finalmente

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{x}}} \right) \right] \psi_i(t)\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{43}$$

Se $\tilde{x} \equiv x$, então $\tilde{L} \equiv L$ (Lagrangeano do sistema) e portanto (43) seria sempre satisfeita porque

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \equiv 0$$

Porém $\tilde{x} \neq x$ e então já (43) permite definir uma função $\tilde{L}$ que minimiza o integral I conforme se desejava em (39)

$$\tilde{E} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{x}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{x}}} \right)$$

a qual desempenha uma função semelhante à do Lagrangeano.

Portanto, as n equações

$$\int_{t_0}^{t_1} \tilde{E}\, \psi_i\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{43'}$$

permitem minimizar o integral no tempo de uma função $\tilde{L}$ semelhante ao Lagrangeano ($L = T - V$), que nem sequer necessita de ser conhecida para a aplicação do método.

2.2.4.1 Solução simplificada $x = x_0 \cos \nu t$ (¹)

Supondo em (40) $x = x_0 \cos \nu t$, a equação (41) fica

$$E = [\,(1 - c^2)\, x_0 - \Delta_0\,] \cos \nu t \pm x_0^3 \cos^3 \nu t$$

e (43') vem para o intervalo de um período ($t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi/\nu$)

$$\int_0^{2\pi/\nu} \left\{ x_0\, [\,(1 - c^2)\, x_0 - \Delta_0\,] \cos^2 \nu t \pm x_0^4 \cos^4 \nu t \right\} dt = 0$$

ou

$$(1 - c^2)\, x_0 \pm \frac{3}{4}\, x_0^3 - \Delta_0 = 0 \tag{44}$$

equação já conhecida de (21) e a partir da qual se determina x_0 em função de c e de Δ_0, coeficientes adimensionais introduzidos em 2.

(¹) Por comodidade eliminou-se o símbolo de solução aproximada (~).

Notar que o intervalo $(0, \pi/2\nu)$ também serve, uma vez que $\left.\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}}\right|_{t=0} = 0$ e $\psi_i\left(\frac{\pi}{2\nu}\right) = 0$.

2.2.4.2 Solução $x = x_1 \cos \nu t + x_3 \cos 3\nu t$

Será agora $\psi_1 = \cos \nu t$ e $\psi_2 = \cos 3\nu t$, vindo (41)

$$E = [(1-c^2)\, x_1 - \Delta_0]\cos \nu t + (1-9c^2)\, x_3 \cos 3\nu t \pm (x_1 \cos \nu t + x_3 \cos 3\nu t)^3$$

e definindo-se duas equações para (43').

$$\int_0^{2\pi/\nu} \Big\{ [(1-c^2)\, x_1 - \Delta_0] \cos^2 \nu t + (1-9c^2)\, x_3 \cos 3\nu t \cos \nu t \pm (x_1 \cos \nu t + x_3 \cos 3\nu t)^3 \,.$$
$$.\ \cos 3\nu t \Big\}\, dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi/\nu} \Big\{ x_3 [(1-c^2)\, x_1 - \Delta_0] \cos \nu t \cos 3\nu t + x_3 (1-9c^2)\, x_3 \cos^2 3\nu t \pm x_3 (x_1 \cos \nu t + x_3 \cos 3\nu t)^3$$
$$.\ \cos \nu t \Big\}\, dt = 0$$

ou

$$\begin{cases} (1-c^2)\, x_1 - \Delta_0 \pm \frac{3}{4} x_1^3 \pm \frac{3}{4} x_1^2 x_3 \pm \frac{3}{2} x_1 x_3^2 = 0 \\ (1-9c^2)\, x_3 \pm \frac{1}{4} x_1^3 \pm \frac{3}{2} x_1^2 x_3 \pm \frac{3}{4} x_3^3 = 0 \end{cases} \tag{45}$$

Este sistema permite definir x_1 e x_3 em função de c e Δ_0.

2.2.4.3 Solução $x = x_1 \cos \nu t + x_5 \cos 5\nu t$

Tal como em 2.4.4.2 virá

$$\begin{cases} (1-c^2)\, x_1 - \Delta_0 \pm \frac{3}{4} x_1^3 \pm \frac{3}{4} x_1 x_5^2 = 0 \\ [(1-25c^2) \pm \frac{3}{2} x_1^2 \pm \frac{3}{4} x_5^2] \,.\, x_5 = 0 \end{cases} \tag{45'}$$

2.2.4.4 Solução $x = x_1 \cos \nu t + x_7 \cos 7\nu t$

Do mesmo modo que em 2.4.4.4

$$\begin{cases} (1-c^2)\, x_1 - \Delta_0 \pm \frac{3}{4} x_1^3 \pm x_1 x_7^2 = 0 \\ [(1-49c^2) \pm \frac{3}{2} x_1^2 \pm \frac{3}{4} x_7^2] \,.\, x_7 = 0 \end{cases} \tag{45''}$$

2.2.4.5 Solução $x = x_0 \operatorname{cn} u$ ou $x = x_0 \operatorname{sn} u$

Não tem interesse propor uma solução deste tipo porque só poderemos actuar no parâmetro x_0.

* * *

O método de Ritz é mais aproximado que o energético pois o resultado só depende da solução oferecida, e não da escolha de quaisquer pontos.

O gráfico II, que tal como o anterior representa a família de curvas de amplificação do movimento do sistema, foi elaborado usando o método de Ritz: com uma aproximação para $c > 1$ (equação 44), e com duas aproximações para $c < 1$: ($x_1 \cos \nu t + x_3 \cos 3\nu t$) (equações 45) em torno de $c \approx 1/3$, $x_1 \cos \nu t + x_5 \cos 5\nu t$ (equações 45') em torno de $c \approx 1/5$, $x_1 \cos \nu t + x_7 \cos 7\nu t$ equações 45'') em torno de $c \approx 1/7$, etc., até zero, para salientar as ressonâncias hiperharmónicas daquelas ordens.

Nota 1: Propositadamente eliminámos os prolongamentos das curvas nas zonas de ressonância hiperharmónica, para tornar o gráfico menos confuso e porque é impossível obter nos modelos reais, sistemas perfeitamente conservativos. Na realidade, bastará um mínimo de histereses para que as amplificações em torno de $c = 1/3$, $1/5$, $1/7$, etc., não ultrapassem os valores definidos pelas curvas desenhadas. Em torno de $c = 1/5$ as curvas foram corrigidas de acordo com a Nota 3.

O cálculo das curvas de amplificação considerando os sistemas como não dissipativos, sendo por excesso, integra-se perfeitamente na orientação adoptada em engenharia, sob o ponto de vista do engenheiro mecânico que pretende obter bases para o cálculo em regime dinâmico dos órgãos de máquinas sujeitos a vibrações, e supõe as condições mais desfavoráveis de comportamento.

Nota 2: As curvas que se apresentam no gráfico II representam a maior deformação do sistema, e não a soma das amplitudes das harmónicas. Exemplificando, na combinação $x_1 \cos \nu t + x_5 \cos 5\nu t$ a soma das amplitudes será $| x_1 + x_5 |$ mas o maior máximo pode ser superior àquele valor quando x_1 e x_5 forem de sinais contrários.

Nota 3: As 2.as equações de (45') e 45'') proporcionam uma solução idênticamente nula para o coeficiente da hiperharmónica, ficando aqueles sistemas reduzidos à equação (44). Ora isto sucede devido às aproximações do método e já não se verifica se usarmos uma solução a 3 termos (por exemplo, $x_1 \cos \nu t + x_3 \cos 3\nu t + x_5 \cos 5\nu t$, em torno de $c = 1/5$), solução esta que não usámos porque é extraordinàriamente difícil de obter sem recorrer ao cálculo automático.

2.2.5 Método da amplitude variável

Neste método supõe-se uma solução com a forma $x = X(t) \sin \nu t$ ou $x = X(t) \cos \nu t$ consoante se considerar a equação diferencial do sistema com perturbação sinusoidal:

$$\frac{\ddot{x}}{\omega_0^2} + x \pm x^3 = \Delta_0 \sin \nu t \tag{46}$$

ou com a forma (17), respectivamente.

Escolhendo a primeira hipótese [1], façamos

$$X(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \sin i\nu t + \sum_{=1}^{m} b_j \cos j\nu t \tag{47}$$

ficando-nos $(1 + n + m)$ parâmetros para ajustar.

Numa primeira simplificação imaginaremos que

$$a_i, b_j << a_0$$

e o método terá tanto maior aproximação quanto mais expressiva for a desigualdade.

Derivando x duas vezes, vem

$$\ddot{x} = - a_0 \nu^2 \sin \nu t - \nu^2 \sum_{i=1}^{n} a_i (1 + i^2) \sin i\nu t \sin \nu t - \nu^2 \sum_{j=1}^{m} b_j (1 + j^2) \cos j\nu t \,.$$

$$. \sin \nu t + 2\nu^2 \sum_{i=1}^{n} i\, a_i \cos i\nu t \cos \nu t - 2\nu^2 \sum_{j=1}^{m} j\, b_j \sin j\nu t \cos \nu t \tag{48}$$

---

[1] É indiferente optar por uma ou por outra hipótese não perdendo o problema generalidade.

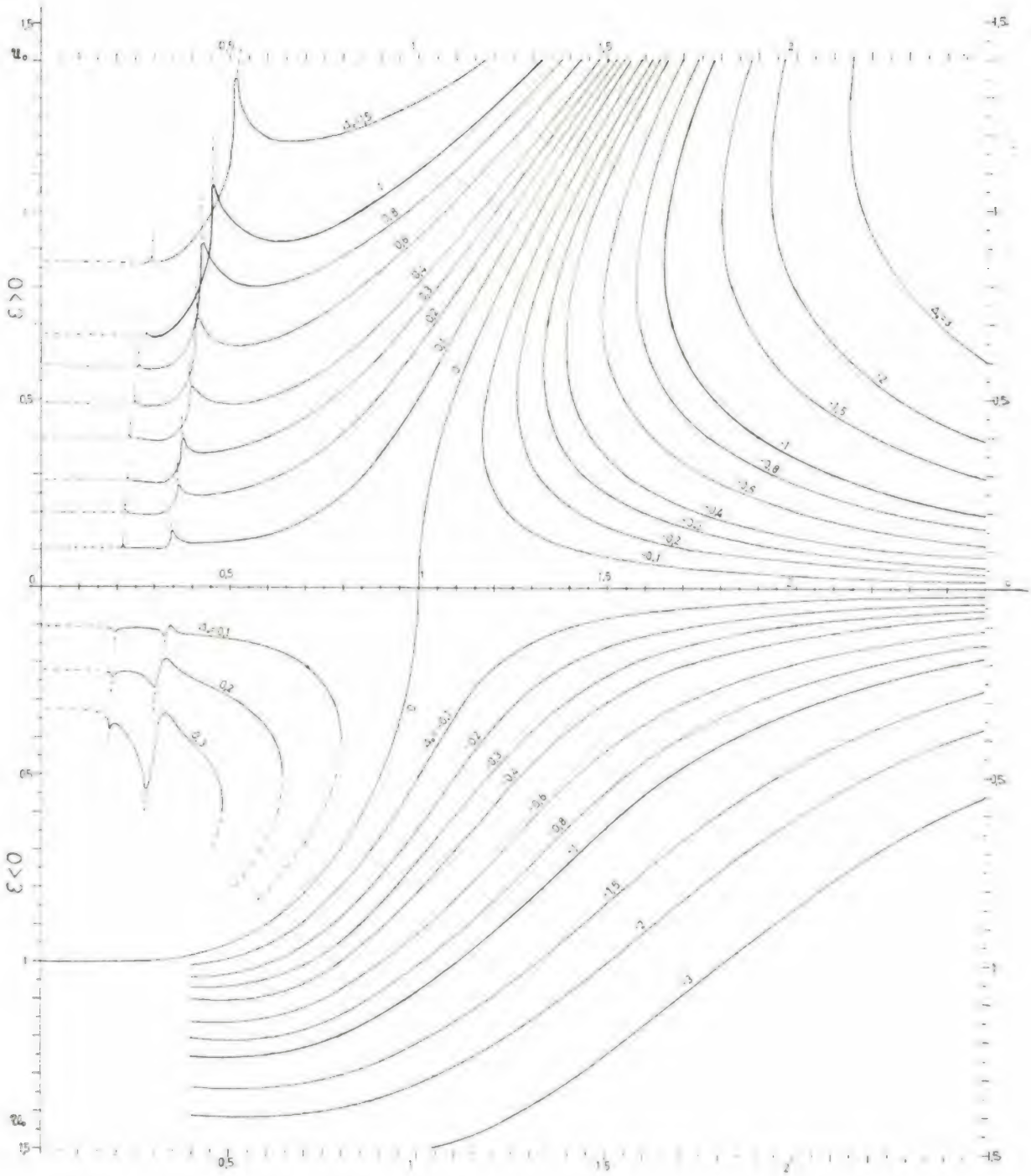
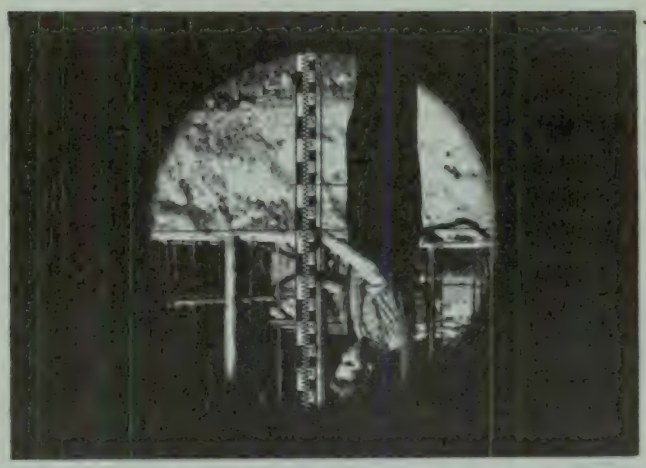


GRAFICO II

ANTIGAMENTE :

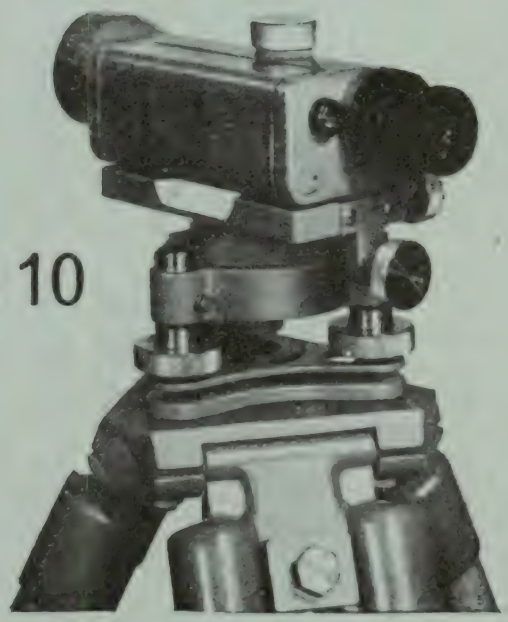


HOJE :

Com
imagem
direita
na luneta

WILD
HEERBRUGG

N 10



Trabalho cómodo e simples sem erros e sem dúvidas, sinais correctos, não invertidos, claros e rápidos.

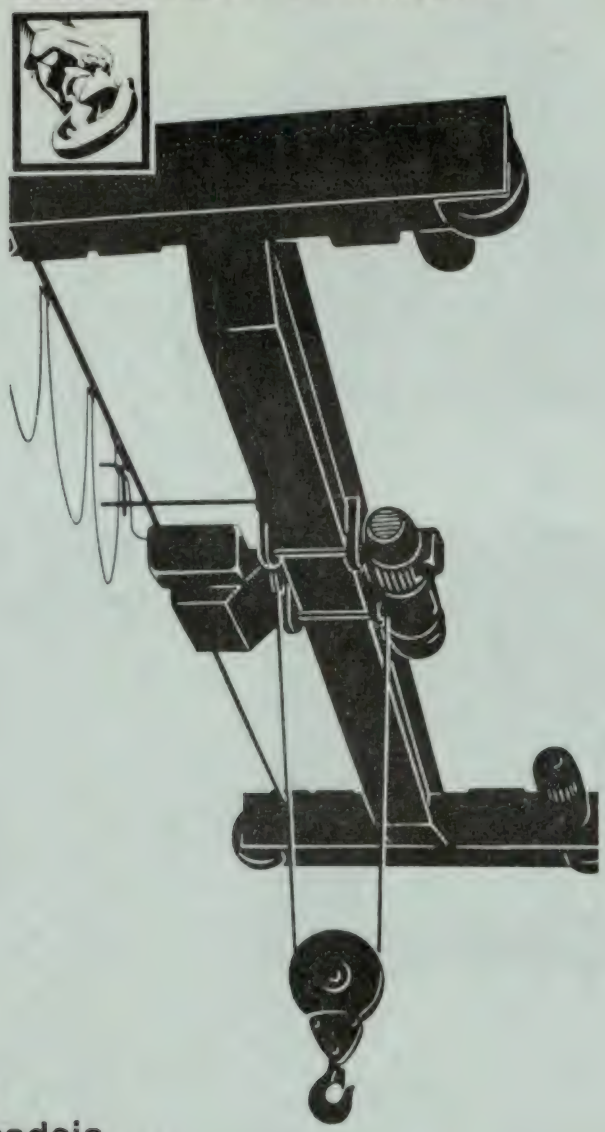
O pequeno nível WILD N 10 com a designação «E» tem imagem direita do campo de observação na luneta. A mesma tem luminosidade igual ao modelo convencional e o mesmo tamanho.

Representantes exclusivos

WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA-2 — TELEFONE 68 11 27

DEMAG EQUIPA TODA A INDUSTRIA



Pontes rolantes fabricadas em cadeia . . .

As pontes rolantes Standard são fabricadas em série, nos tipos monoviga e biviga, pelo sistema de combinação de peças normalizadas.
Para vãos até 28 m e capacidades de carga de 250 kg a 20.000 kg permitem a adaptação às vossas condições de trabalho.

Reduzido peso próprio, pequena altura de construção, prazos de entrega rápidos, preços excepcionalmente baixos, eis as vantagens das pontes rolantes standard «Demag»:
Consulte-nos e os nossos engenheiros efectuarão o estudo do seu problema gratuitamente.
Assistência exemplar - O vosso sucesso será também o nosso.

ROMAR — ORGANIZAÇÃO AO SERVIÇO DA INDUSTRIA

SOCIEDADE COMERCIAL ROMAR, LDA.

LISBOA – TRAVESSA DA GALÉ, Nº 9. TEL. 635670 / 634061 • PORTO – R. DE SÁ DA BANDEIRA, Nº 589/603. TEL. 25871/32205

x^3 fica, desprezando os termos em a_i e b_j acima da primeira ordem

$$x^3 = \Bigg\{ a_0^3 + 3\, a_0^2 \sum_{i=1}^{n} a_i \sin i\nu t + 3\, a_0^2 \sum_{j=1}^{m} b_j \cos j\nu t + 3\, a_0 \Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i \sin i\nu t +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} b_j \cos j\nu t \Bigg]^2 + \Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i \sin i\nu t + \sum_{j=1}^{m} b_j \cos j\nu t \Bigg]^3 \Bigg\} \sin^3 \nu t \simeq$$

$$\simeq a_0^3 \sin^3 \nu t + 3\, a_0^2 \sum_{i=1}^{n} a_i \sin i\nu t \sin^3 \nu t + 3\, a_0^2 \sum_{j=1}^{m} b_j \cos j\nu t \,.\, \sin^3 \nu t \qquad (49)$$

vem, substituindo em (48) e (49), e estas expressões em (46), e aplicando relações trigonométricas conhecidas:

$$\frac{1}{x_0^2} \Bigg\{ - a_0 \nu^2 \sin \nu t - \nu^2 \sum_{i=1}^{n} a_i (1 + i^2) \sin i\nu t \,.\, \sin \nu t - \nu^2 \sum_{j=1}^{m} b_j (1 + j^2) \cos j\nu t \,.\, \sin \nu t +$$

$$+ 2\nu^2 \Big[a_1 (1 - \sin \nu t \,.\, \sin \nu t) + 2\, a_2 (\cos \nu t - \sin 2\nu t \,.\, \sin \nu t) + 3\, a_3 (1 - 2 \sin \nu t \,.\, \sin \nu t - \sin 3\nu t \,.$$

$$.\, \sin \nu t) + 4\, a_4 (\cos \nu t - 2 \sin 2\nu t \,.\, \sin \nu t - \sin 4\nu t \,.\, \sin \nu t) + 5\, a_5 (\ldots) + \ldots \Big] - 2\nu^2 \Big[b_1 (\cos \nu t \,.$$

$$.\, \sin \nu t) + 2\, b_2 (\sin \nu t + \cos 2\nu t \,.\, \sin \nu t) + 3\, b_3 (\cos 3\nu t \,.\, \sin \nu t + 2 \cos \nu t \,.\, \sin \nu t) +$$

$$+ 4\, b_4 (\cos 4\nu t \,.\, \sin \nu t + 2 \cos 2\nu t \,.\, \sin \nu t + \sin \nu t) + 5\, b_5 (\ldots) + \ldots \Big] \Bigg\} + a_0 \sin \nu t +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i \sin i\nu t \,.\, \sin \nu t + \sum_{j=1}^{m} b_j \cos j\nu t \sin \nu t \pm a_0^3 \left(\frac{1}{2} \sin \nu t - \frac{1}{2} \cos 2\nu t \,.\, \sin \nu t \right) \pm 3\, a_0^2 \Big[a_1 \Big(\frac{3}{4} \sin \nu t \,.$$

$$.\, \sin \nu t - \frac{1}{4} \sin 3\nu t \sin \nu t \Big) + a_2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\nu t \,.\, \sin \nu t - \frac{1}{4} \sin 4\nu t \sin \nu t \right) + a_3 \left(\frac{1}{2} \sin 3\nu t \,.\, \sin \nu t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \sin 5\nu t \,.\, \sin \nu t - \frac{1}{4} \sin \nu t \,.\, \sin \nu t \right) + a_4 \left(\frac{1}{2} \sin 4\nu t \,.\, \sin \nu t - \frac{1}{4} \sin 6\nu t \,.\, \sin \nu t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \sin 2\nu t \,.\, \sin \nu t \right) + a_5 (\ldots) + \ldots \Big] \pm 3\, a_0^2 \Big[b_1 \left(\frac{1}{4} \cos \nu t \,.\, \sin \nu t - \frac{1}{4} \cos 3\nu t \,.\, \sin \nu t \right) +$$

$$+ b_2 \left(\frac{1}{2} \cos 2\nu t \,.\, \sin \nu t - \frac{1}{4} \sin \nu t - \frac{1}{4} \cos 4\nu t \,.\, \sin \nu t \right) + b_3 \left(\frac{1}{2} \cos 3\nu t \,.\, \sin \nu t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \cos 5\nu t \,.\, \sin \nu t - \frac{1}{4} \cos \nu t \,.\, \sin \nu t \right) + b_4 \left(\frac{1}{2} \cos 4\nu t \,.\, \sin \nu t - \frac{1}{4} \cos 6\nu t \sin \nu t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \cos 2\nu t \sin \nu t \right) - b_5 (\ldots) \pm \ldots \Big] = \Delta_0 \sin \nu t \qquad (50)$$

Para que esta expressão se verifique independentemente dos valores das funções trigonométricas, terá que ser, tomando $n = m = 4$

$$\frac{1}{\omega_0^2}(-a_0\nu^2 - 4\nu^2 b_2 - 8\nu^2 b_4) + a_0 \pm \frac{1}{2}a_0^3 \mp \frac{3}{4}a_0^2 b_2 - \Delta_0 = 0 \qquad (51.1)$$

$$2\nu^2 a_1 + 6\nu^2 a_3 = 0 \qquad (51.2)$$

$$4\nu^2 a_2 + 8\nu^2 a_4 = 0 \qquad (51.3)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}(-4\nu^2 a_1 - 12\nu^2 a_3) + a_1 \pm \frac{9}{4}a_0^2 a_1 \mp \frac{3}{4}a_0^2 a_3 = 0 \qquad (51.4)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}[-9\nu^2 a_2 - 16\nu^2 a_4] + a_2 \pm \frac{3}{2}a_0^2 a_2 \mp \frac{3}{4}a_0^2 a_4 = 0 \qquad (51.5)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}[-16\nu^2 a_3] + a_3 \mp \frac{3}{4}a_0^2 a_1 \pm \frac{3}{2}a_0^2 a_3 = 0 \qquad (51.6)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}[-25\nu^2 a_4] + a_4 \mp \frac{3}{4}a_0^2 a_2 \pm \frac{3}{2}a_0^2 a_4 = 0 \qquad (51.7)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}[4\nu^2 b_1 - 12\nu^2 b_3] + b_1 \pm \frac{3}{4}a_0^2 b_1 \mp \frac{3}{4}a_0^2 b_3 = 0 \qquad (51.8)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}[-9\nu^2 b_2 - 16\nu^2 b_4] + b_2 \mp \frac{1}{2}a_0^3 \pm \frac{3}{2}a_0^2 b_2 \mp \frac{3}{4}a_0^2 b_4 = 0 \qquad (51.9)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}[-16\nu^2 b_3] + b_3 \mp \frac{3}{4}a_0^2 b_1 \pm \frac{3}{2}a_0^2 b_3 = 0 \qquad (51.10)$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}[-25\nu^2 b_4] + b_4 \mp \frac{3}{4}a_0^2 b_2 \pm \frac{3}{2}a_0^2 b_4 = 0 \qquad (51.11)$$

Substituindo (51.2) em (51.4), e comparando (51.4) e (51.6), vem

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{\pm 3a_0^2}{4 \pm 9a_0^2} = \frac{-16c^2 + 1 \pm \frac{3}{2}a_0^2}{\pm \frac{3}{4}a_0^2}$$

Sendo esta igualdade incompatível com (51.1), virá $a_1 = a_3 = 0$.

Substiuindo (51.3) em (51.5) e comparando (51.1) com (51.7), fica

$$\frac{a_2}{a_4} = \frac{\pm 3a_0^2}{-4c^2 + 4 \pm 6a_0^2} = \frac{-25c^2 + 1 \pm \frac{3}{2}a_0^2}{\pm \frac{3}{4}a_0^2}$$

e, para que haja compatibilidade com (51.1), $a_2 = a_4 = 0$.

De (51.8) e (51.10) conclui-se também

$$\frac{b_1}{b_3} = \frac{\pm \frac{3}{4}a_0^2 + 12c^2}{-4c^2 + 1 \pm \frac{3}{4}a_0^2} = \frac{-16c^2 + 1 \pm \frac{3}{2}a_0^2}{\pm \frac{3}{4}a_0^2}$$

e, pelo mesmo motivo que anteriormente, $b_1 = b_3 = 0$.

Verifica-se que há compatibilidade entre (51.9) e (51.11) devido à presença em (51.9) do termo $\frac{1}{2}\ a_0^3$. De (51.11), tiramos

$$b_2 = \frac{1 - 25\ c^2 \pm \frac{3}{2}\ a_0^2}{\pm \frac{3}{4}\ a_0^2}\ b_4 \tag{52}$$

e substituindo em (51.9), vem

$$\left[\left(-9\ c^2 + 1 \pm \frac{3}{2}\ a_0^2\right) \frac{1 - 25\ c^2 \pm \frac{3}{2}\ a_0^2}{\pm \frac{3}{4}\ a_0^2} - 16\ c^2 \mp \frac{3}{4}\ a_0^2\right] b_4 \mp \frac{1}{2}\ a_0^3 = 0 \tag{53}$$

De (53), por substituição de (53) em (52), e de 51.1), obtém-se o sistema de 3 equações:

$$\left\{\begin{array}{l} b_2 = \dfrac{\pm \frac{1}{2}\ a_0^3 \left(1 - 25\ c^2 \pm \frac{3}{2}\ a_0^2\right)}{\left(1 - 9\ c^2 \pm \frac{3}{2}\ a_0^2\right)\left(1 - 25\ c^2 \pm \frac{3}{2}\ a_0^2\right) \mp \frac{3}{4}\ a_0^2 \left(16\ c^2 \pm \frac{3}{4}\ a_0^2\right)} \\[2ex] b_4 = \dfrac{\pm \frac{3}{8}\ a_0^5}{\left(1 - 9\ c^2 \pm \frac{3}{2}\ a_0^2\right)\left(1 - 25\ c^2 \pm \frac{3}{2}\ a_0^2\right) \mp \frac{3}{4}\ a_0^2 \left(16\ c^2 \pm \frac{3}{4}\ a_0^2\right)} \\[2ex] \left(a_0 + 4\ b_2 + 8\ b_4\right) c^2 - a_0 \mp \frac{1}{2}\ a_0^3 \pm \frac{3}{4}\ a_0^2\ b_2 + \Delta_0 = 0 \end{array}\right. \tag{34}$$

que permitem determinar b_2, b_4 e a_0, e portanto a função X (t), obtendo-se

$$x = (a_0 + b_2 \cos 2\,\nu t + b_4 \cos 4\,\nu t) \sin \nu t \tag{55}$$

Nota: era de esperar o desaparecimento de alguns dos coeficientes em face das considerações apresentadas no fim de 2.2.3.

O gráfico III, que pretende representar tal como os anteriores as famílias de curvas de amplificação do movimento do sistema, foi obtido a partir de (54) apresentando-se os valores em que

$$b_2,\ b_4 \leqslant 0{,}1\ a_0$$

vindo para valor da amplitude

$$x_0 = a_0 - b_2 + b_4$$

Este método é razoàvelmente aproximado para valores de c superiores a 0,5. Para valores de $c < 0{,}5$ começam a notar-se os efeitos das potências de b_2 e b_4 que foram desprezadas.

Verifica-se que, em relação aos métodos descritos anteriormente neste capítulo 2.2., este processo não traz vantagens sob o aspecto qualitativo uma vez que o gráfico II é mais completo, reconhecendo-se-lhe no entanto o mérito de permitir valores mais aproximados na zona em que é válido.

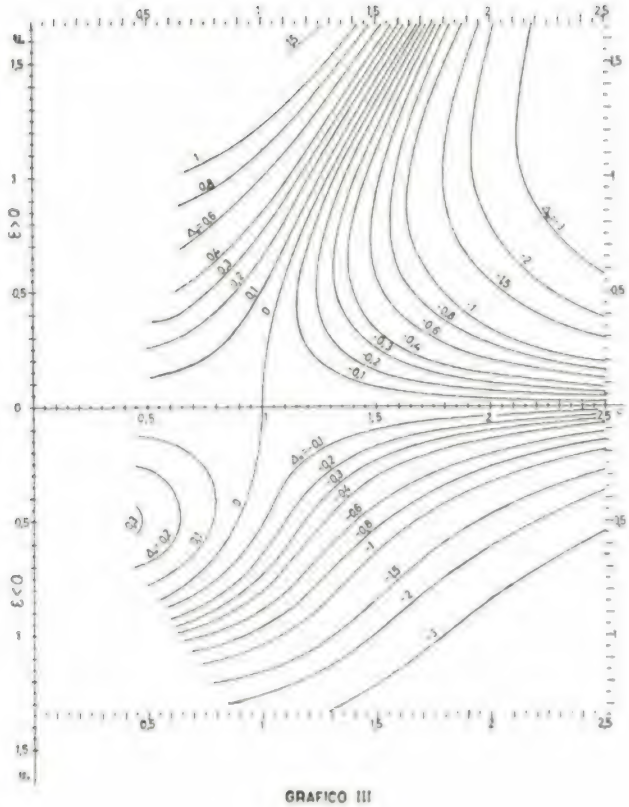


GRAFICO III

3. SISTEMAS COM ELASTICIDADE ASSIMÉTRICA

Nos sistemas com elasticidade assimétrica, a equação diferencial (1) toma uma nova forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 (x + \varepsilon_1 x^3) &= p(t) \qquad x > 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 (x + \varepsilon_2 x^3) &= p(t) \qquad x < 0 \end{aligned} \tag{56}$$

uma vez que a força elástica é diferente para os dois ramos, positivo e negativo [1, fig. 4 a 6].

Usando os coeficientes adimensionais

$$x_1 = \sqrt{\varepsilon_1}\ x \quad , \quad \Delta_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\ p}{\omega_0^2} \qquad \text{para } \varepsilon_1 > 0$$

$$x_1 = \sqrt{-\varepsilon_1}\ x \quad , \quad \Delta_1 = \frac{\sqrt{-\varepsilon_1}\ p}{\omega_0^2} \qquad \text{para } \varepsilon_1 < 0$$

$$x_2 = \sqrt{\varepsilon_2}\ x \quad , \quad \Delta_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\ p}{\omega_0^2} \qquad \text{para } \varepsilon_2 > 0$$

$$x_2 = \sqrt{-\varepsilon_2}\ x \quad , \quad \Delta_2 = \frac{\sqrt{-\varepsilon_2}\ p}{\omega_0^2} \qquad \text{para } \varepsilon_2 < 0$$

o sistema (56) fica

$$\frac{\ddot{x}_1}{\omega_0^2} + x_1 \pm x_1^3 = \Delta_1 (\nu t) \qquad x_1 \geqslant 0$$
$$\frac{\ddot{x}_2}{\omega_0^2} + x_2 \pm x_2^3 = \Delta_2 (\nu t) \qquad x_2 \leqslant 0 \tag{57}$$

Os sinais + ou − referem-se, respectivamente, a sistemas duros (ε_1 ou $\varepsilon_2 > 0$) ou macios (ε_1 ou $\varepsilon_2 < 0$), podendo portanto haver 4 hipóteses de acordo com a combinação de sinais. Nos sistemas com ramos rectilíneos a transformação adimensional não se pode fazer nesses ramos, e virá por exemplo para $\varepsilon_2 = 0$:

$$\frac{\ddot{x}_1}{\omega_0^2} + x_1 \pm x_1^3 = \Delta_1 (\nu t) \qquad x_1 \geqslant 0$$
$$\frac{\ddot{x}_2}{\omega_0^2} + x_2 \qquad = \Delta_2 (\nu t) \qquad x_2 \leqslant 0 \tag{57'}$$

em que se fez $x_2 = \mathrm{x}$ e $\Delta_2 = \dfrac{\mathrm{p}}{\omega_0^2}$.

Note-se que a curva de elasticidade é contínua na fronteira entre os dois ramos:

$$\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=0} = \omega_0^2 + 3\,\varepsilon_1\,\omega_0^2\,x^2 \Big|_{x=0} = \omega_0^2 \qquad x \geqslant 0$$
$$\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=0} = \omega_0^2 + 3\,\varepsilon_2\,\omega_0^2\,x^2 \Big|_{x=0} = \omega_0^2 \qquad x \leqslant 0$$

3.1 *Perturbação favorável*

Tal como em 2.1, fazendo $\Delta_1 (\nu t) = \alpha_1 x_1$ e $\Delta_2 (\nu t) = \alpha_2 x_2$, virá para (57)

$$\frac{\ddot{x}_1}{\omega_0^2} + (1-\alpha_1)\,x_1 \pm x_1^3 = 0 \qquad x \geqslant 0$$
$$\frac{\ddot{x}_2}{\omega_0^2} + (1-\alpha_2)\,x_2 \pm x_2^3 = 0 \qquad x \leqslant 0 \tag{58}$$

admitindo-se 4 combinações possíveis entre as soluções

$$x \geqslant \;:\; x_1 = x_{01}\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{u} \mid \mu_1) \;,\; \varepsilon_1 > 0 \;;\; x_1 = x_{01}\,\mathrm{sn}(\mathrm{u} \mid \xi_1) \;,\; \varepsilon_1 < 0$$
$$x \leqslant \;:\; x_2 = x_{02}\,\mathrm{cn}\,(\mathrm{u} \mid \mu_2) \;,\; \varepsilon_2 > 0 \;;\; x_2 = x_{02}\,\mathrm{sn}(\mathrm{u} \mid \xi_2) \;,\; \varepsilon_2 < 0$$

Por exemplo, no caso (cn, cn) a solução obtém-se considerando o grupo de equações (8'), tendo em conta as condições aos limites

$$x \geqslant 0 \begin{cases} \mu_1 = \dfrac{x_{01}^2}{2\,x_{01} - 2\,\Delta_{01} + 2\,x_{01}^3} \\ \mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_1\,(\mu) \\ \mathrm{c}_1^2 = \dfrac{x_{01}^2}{2\,\mu_1 \left(\dfrac{2\,\mathrm{K}_1}{\pi}\right)^2} \end{cases} \qquad x \leqslant 0 \begin{cases} \mu_2 = \dfrac{x_{02}^3}{2\,x_{02} - 2\Delta_{01} + 2\,x_{02}^3} \\ \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_2\,(\mu) \\ \mathrm{c}_2^2 = \dfrac{x_{02}^2}{2\,\mu_2 \left(\dfrac{2\,\mathrm{K}_2}{\pi}\right)^2} \end{cases} \tag{59}$$

A condição da continuidade implica que

$$\dot{x}_1 \Big|_{x_1=0} = \dot{x}_2 \Big|_{x_2=0}$$

e derivando $x_0 \, \mathrm{c\,n}\,(\mathrm{u} \mid \mu)$, e tendo em conta a relação entre x e x, vem

$$\frac{K_1 x_{01}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \, \mathrm{d\,n}\, K_1 = \frac{K_2 x_{02}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \, \mathrm{d\,n}\, K_2$$

Se fizermos $c_1 = c_2$, entre as terceiras expressões de (59) obtém-se

$$\mu_2 K_2^2 x_{01}^2 = \mu_1 K_1^2 x_{02}^2$$

e, relacionando esta equação com a anterior, e tendo em conta que $\mathrm{d\,n}\,K\,(1-\mu)^{1/2}$, vem

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^4 &= \frac{1-\mu_2}{1-\mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\ \frac{x_{01}}{x_{02}} &= \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \cdot \frac{K_1}{K_2} \end{aligned} \right. \tag{60}$$

Anàlogamente para a solução (sn, sn)

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^4 &= \frac{\xi_2}{\xi_1} \cdot \frac{-\varepsilon_1}{-\varepsilon_2} \\ \frac{x_{01}}{x_{02}} &= \sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2}} \, \frac{K_1}{K_2} \end{aligned} \right. \tag{61}$$

Para a solução (cn, sn)

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^4 &= \frac{\varepsilon_2}{\mu_1 (1-\mu_1)} \cdot \frac{\varepsilon_1}{-\varepsilon_2} \\ \frac{x_{01}}{x_{02}} &= \sqrt{\frac{\mu_1}{\xi_2}} \cdot \frac{K_1}{K_2} \end{aligned} \right. \tag{62}$$

Para a solução (sn, cn)

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^4 &= \frac{\mu_2 (1-\mu_2)}{\xi_1} \cdot \frac{-\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\ \frac{x_{01}}{x_{02}} &= \sqrt{\frac{\xi_1}{\mu_2}} \cdot \frac{K_1}{K_2} \end{aligned} \right. \tag{63}$$

Na hipótese de haver um ramo rectilíneo, ε_1 ou $\varepsilon_2 = 0$ e em vez de (59) temos, por exemplo para (cn, cos),

$$x \leqslant 0 \left\{ \begin{aligned} & \frac{x_{01}^3}{2\,x_{01} - 2\,\Delta_{01} + 2\,x_{01}^3} \\ & K_1 = K_1\,(\mu) \\ & c_1^2 = \frac{x_{01}^2}{2\,\mu_1 \left(\frac{2\,K_1}{\pi}\right)^2} \end{aligned} \right. \qquad x \leqslant 0 \left\{ x_{02} = \frac{\Delta_{02}}{1 - c_2^2} \right. \tag{59'}$$

e a condição de continuidade

$$\frac{x_{01}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{2\,K_1}{\pi} \operatorname{dn} K_1 = x_{02}$$

e a igualdade entre c_1 e c_2

$$c^2 = \frac{x_{01}^2}{2\,\mu_1 \left(\frac{2\,K_1}{\pi}\right)^2} = \frac{x_{02} - \Delta_{02}}{x_{02}}$$

$$= 1 - \frac{\Delta_{02} \sqrt{\varepsilon_1}}{x_{01} \left(\frac{2\,K_1}{\pi}\right)^2 \sqrt{1 - \mu_1}} \tag{64}$$

Tomando (sn, sin), vem em vez de (64)

$$c^2 = \frac{x_{01}^2}{2\,\xi_1 \left(\frac{2\,K_1}{\pi}\right)^2} = 1 - \frac{\Delta_{02} \sqrt{\varepsilon_1}}{x_{01} \left(\frac{2\,K_1}{\pi}\right) \sqrt{1 - \xi_1}} \tag{65}$$

As expressões (60) a (65) permitem relacionar os parâmetros que definem as soluções de modo a que as formas da perturbação e do movimento resultante sejam iguais e ainda que os períodos correspondentes às oscilações nos ramos positivo e negativo sejam também iguais $\left(\frac{\pi}{\omega_0\, c_1} = \frac{\pi}{\omega_0\, c_2}\right)$.

Expressões análogas se obteriam para outras quaisquer relações entre $\frac{\pi}{\omega_0\, c_1}$ e $\frac{\pi}{\omega_0\, c_2}$.

A aplicabilidade de todo este formulário às condições reais é bastante problemática uma vez que é condição necessária que a perturbação tenha uma forma especial, que na maioria das vezes é bastante assimétrica, para se adaptar às equações (58). A condição $c_1 = c_2$ já impôs que a perturbação seja de duração igual nos ramos positivo e negativo mas é obrigada a adaptar as amplitudes respectivas às fórmulas referidas.

Como exemplo, suponhamos que

$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ (sistema duro-macio)

$\mu_1 = 0{,}5$

Das tabelas [3, pág. 108] obtém-se $K_1 = 1{,}8541$.

Da fórmula (62), vem

$$K_2^4\, \xi_2 = \mu_1 (1 - \mu_1)\, K_1^4 \simeq 29{,}6$$

Uma vez que K_2 é função de ξ_2, determina-se gràficamente:

$$\begin{cases} \xi_2 \simeq 0{,}33 \\ K_2 \simeq 1{,}732 \end{cases}$$

De (62) obtém-se também

$$\frac{x_{01}}{x_{02}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\xi_2}} \left(\frac{K_1}{K_2}\right) \simeq 1{,}315$$

Supondo $x_{01} = 1$, vem $x_{02} = 0{,}76$ e das expressões (8') e (12') obtém-se

$$\Delta_{01} = 1$$
$$\Delta_{02} = 0{,}468$$

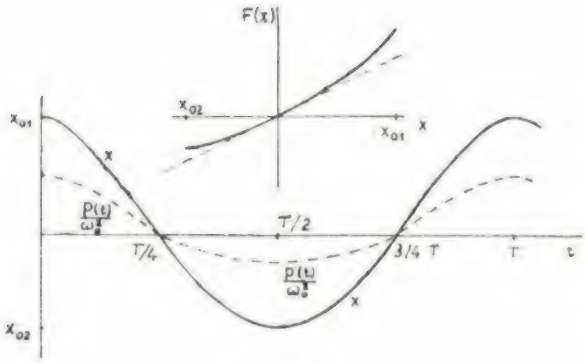


Fig. 7

Como é $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, vem $\frac{x_{01}}{x_{02}} = \frac{x_{01}}{x_{02}}$ e $\frac{\Delta_{01}}{\Delta_{02}} = \frac{p_{01}}{p_{02}}$, [c determina-se por exemplo em (8'): c = 0,845], e as curvas de perturbação e deslocamento tomam a forma da figura 7.

De notar que a forma da perturbação embora seja igual à do movimento não é necessàriamente analítica na fronteira $x = 0$.

3.2. *Perturbação sinusoidal*

Já se referiu que nos sistemas não lineares o princípio da sobreposição não é válido e portanto a resposta do sistema só se poderá apreciar para cada perturbação resolvendo a equação diferencial, modelo matemático do sistema. Mas, se no tratamento geral destes problemas já não tem sentido considerar a perturbação com a forma sinusoidal pura, muito menos razoável será admitir qualquer outra perturbação, salvo se esta se refere a um caso específico. Nesta ordem de ideias, usaremos neste capítulo as funções seno ou coseno como padrão de aferição da resposta de sistemas assimétricos, tal como fizemos em relação aos sistemas anti-simétricos.

O sistema (56) será agora

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 (x_1 + \varepsilon_1 x_1^3) = p_0 \cos \nu t \qquad x_1 \geqslant 0$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 (x_2 + \varepsilon_2 x_2^3) = p_0 \cos \nu t \qquad x_2 \leqslant 0 \tag{66}$$

e sob a forma (57) fica

$$\frac{\ddot{x}_1}{\omega_0^2} + x_1 \pm x_1^3 = \Delta_{01} \cos \nu t \qquad x_1 \geqslant 0$$

$$\frac{\ddot{x}_2}{\omega_0^2} + x_2 \pm x_2^3 = \Delta_{02} \cos \nu t \qquad x_2 \leqslant 0 \tag{66'}$$

3.2.1 Método energético

Para aplicação deste método será conveniente escolher os pontos P_i de modo a que cada equação se situe em um só ramo da curva do deslocamento.

Por exemplo, supondo uma solução a dois parâmetros

$$x = a_0 + a_1 \cos \nu t \tag{67}$$

justificável devido à assimetria das deformações do sistema livre, atribuímos as posições dos três pontos necessários P_0, P_1 e P_2 nas posições assinaladas na figura 8 que correspondem

$$\begin{cases} x_{P_0} = a_0 + a_1 \\ \dot{x}_{P_0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{P_1} = 0 \\ \dot{x}_{P_1} = -a_1 \nu \sin \nu t_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{P_2} = a_0 - a_1 \\ \dot{x}_{P_2} = 0 \end{cases}$$

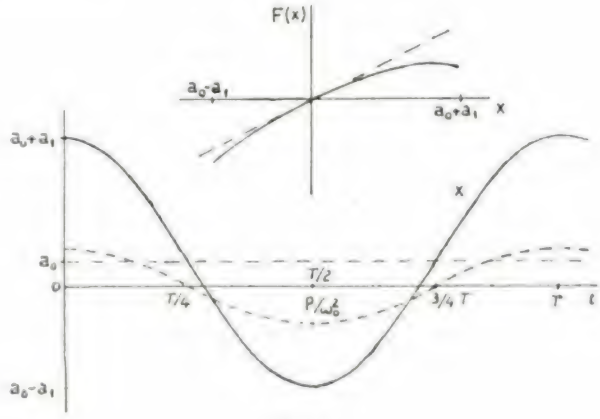


Fig. 8

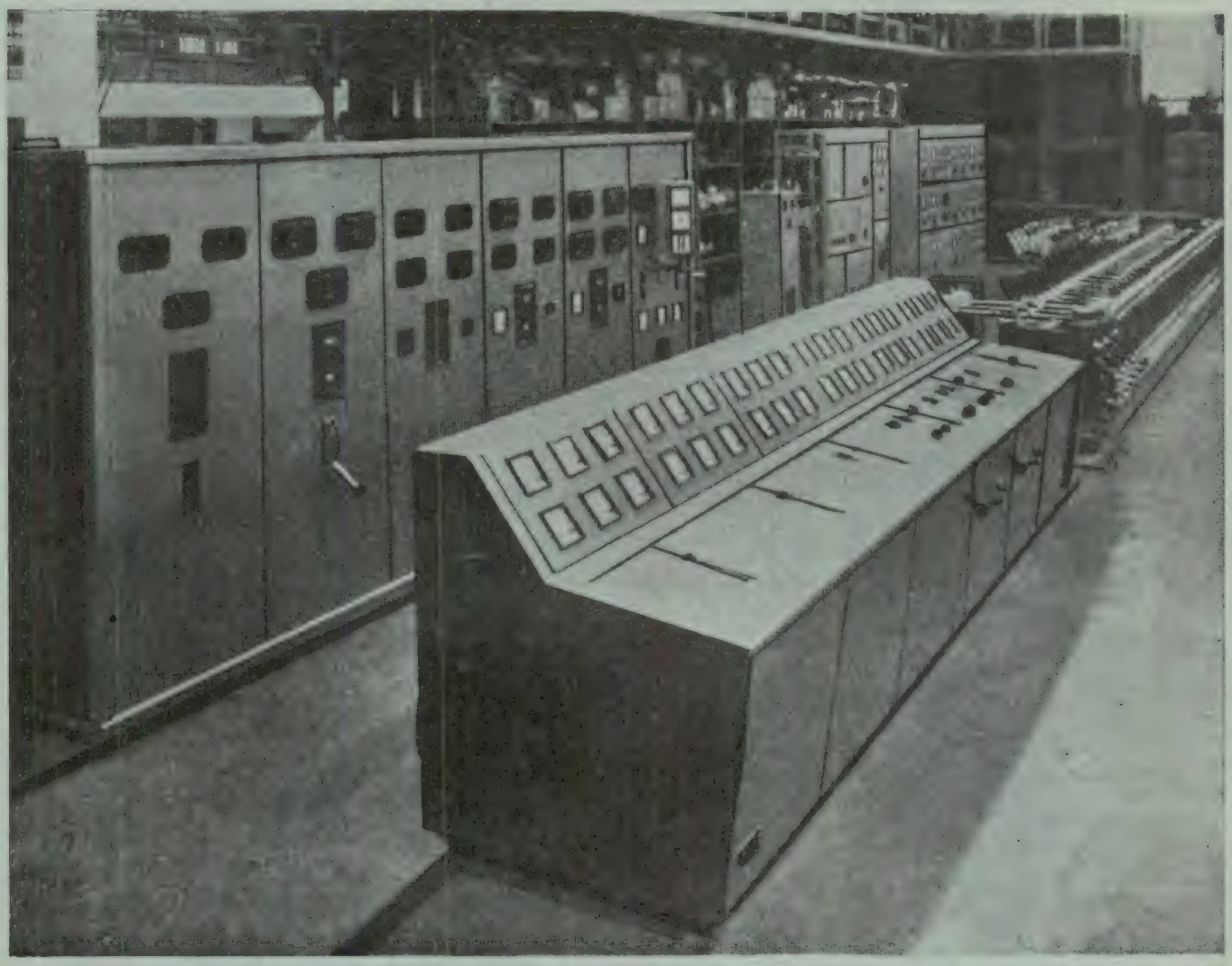
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743

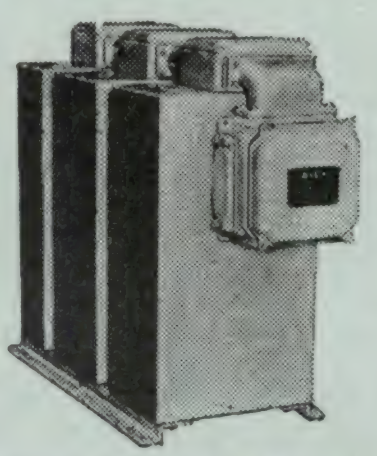


Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

CONDENSADORES **ASEA**

PARA MELHORAMENTO DO FACTOR DE POTÊNCIA



Bateria de condensadores tipo CLB, 32 kVAr

- SE PAGA POR CONSUMO DE ENERGIA REACTIVA...
- SE A SUA INSTALAÇÃO ELÉCTRICA ESTÁ SOBRECARREGADA...

...consulte:

ASEA ELÉCTRICA L.DA

SEDE EM LISBOA
R. DE ARTILHARIA UM, 104,4.º-D.º
Telefone P.P.C. — 68 90 17/8/9

END. TELEG.
ASEAPORT

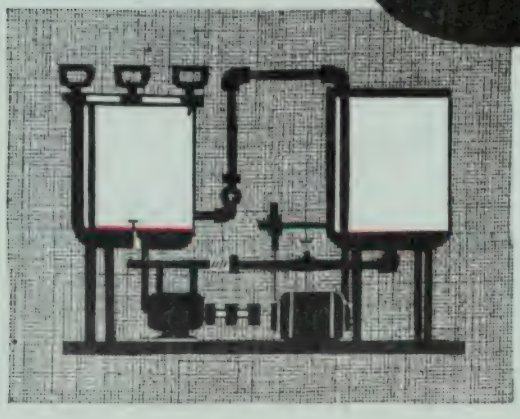
FILIAL NO PORTO
R. DO CAMPO ALEGRE, 144
Telefone P.P.C. — 6 21 06/7

filtros FILFRO, L.da

ALGUMAS DAS PRINCIPAIS APLICAÇÕES:

Água • Açúcar • Óleos vegetais, animais e minerais • Cerveja
Sabão líquido • Resinas naturais e sintéticas • Vinhos • Vinagre
Glicerina • Tintas • Vernizes
Sumos de frutos • Xaropes
Azeite • Industria química

FILTROS NACIONAIS PARA TODOS OS PROBLEMAS DE FILTRAÇÃO



Inteiramente fabricados em Portugal, por técnicos e operários portugueses, segundo a patente port. n.º 29.917

Dezenas de instalações a funcionar no país atestam a sua excelente qualidade.

RUA CAPITÃO FILIPE DE SOUSA, 128
CALDAS DA RAINHA

FILTROS FILFRO, L.da PORTUGAL

Por uma questão de facilidade usaremos nesta e na alínea seguinte as variáveis dimensionais (x, p). Virá, aplicando a equação (34) referida às variáveis x e p:

— entre P_0 e P_1:

$$\left(a_1^2 c^2 + \frac{a_1 p_0}{\omega_0^2}\right) \sin^2 \nu t - (a_0 + a_1)^2 - \frac{\varepsilon_1}{2} (a_0 + a_1)^4 = 0$$

— entre P_1 e P_2: (68)

$$\left(a_1^2 c^2 + \frac{a_1 p_0}{\omega_0^2}\right) \sin^2 \nu t - (a_0 - a_1)^2 - \frac{\varepsilon_2}{2} (a_0 - a_1)^4 = 0$$

e, como de (67), para $x = 0$, se obtém

$$\cos \nu t_1 = - \frac{a_0}{a_1} \tag{69}$$

vem, finalmente,

$$\begin{cases} a_1 a_0 + \dfrac{\varepsilon_1}{8} (a_1 + a_0)^4 - \dfrac{\varepsilon_2}{8} (a_1 - a_0)^4 = 0 \\ \left(c^2 + \dfrac{p_0}{\omega_0^2 a_1}\right) = \dfrac{a_1 - a_0}{a_1 + a_0} + \dfrac{\varepsilon_2}{2} \dfrac{(a_1 - a_0)^3}{a_1 + a_0} \end{cases} \tag{70}$$

O sistema (70) permite determinar a_0 e a_1 e portanto (67) para cada conjunto (ε_1, ε_2, p_0, c).

Por exemplo, para $\varepsilon_1 a_1^2 = -0{,}572$, $\varepsilon_2 a_1^2 = 1$, $\dfrac{p_0}{a_1 \omega_0^2} = 0{,}3$ e $c = \dfrac{\nu}{\omega_0} = 0{,}7$

vem

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 \simeq 0{,}2 \end{cases}$$

e portanto

$$x = 0{,}2 + \cos \nu t$$

Na figura 8 representa-se este exemplo.

3.2.2 Método de Ritz-Galerkin

Tendo presente o que se descreveu em 2.2.4, e propondo a solução (67) [11] vem, no intervalo $\left(0 - \dfrac{\pi}{\nu}\right)$, por substituição em (43') e usando como em 3.2.1 as variáveis x e p:

— Para $\psi_1 = a_0$:

$$\int_0^{\pi/\nu} \tilde{E}\, a_0\, dt = 0$$

$$= \int_0^{\pi/\nu} \left\{ a_0^2 + \left[(1 - c^2)\, a_1 - \frac{p_0}{\omega_0^2}\right] a_0 \cos \nu t \right\} dt +$$

$$+ \varepsilon_1 \int_0^{t_1} (a_0 + a_1 \cos \nu t)^3\, a_0\, dt + \varepsilon_2 \int_{t_1}^{\pi/\nu} (a_0 + a_1 \cos \nu t)^3\, a_0\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{\nu} a_0^2 + \left[\varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 \left(\frac{\pi}{\nu} - t_1\right)\right] \left[a_0^4 + \frac{3}{2} a_0^2 a_1^2\right] + \frac{1}{\nu} \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\left(3 a_0^3 a_1 + \frac{3}{4} a_0 a_1^3\right) \sin \nu t_1 + \left(\frac{3}{4} a_0^2 a_1^2\right) \cdot \sin 2\nu t_1 + \frac{1}{12} a_0 a_1^3 \sin 3\nu t_1\right] = 0 \tag{71}$$

— Para $\psi_1 = a_1 \cos \nu t$:

$$\int_0^{\pi/\nu} \tilde{E}\, a_1 \cos \nu t\, dt = 0$$

$$= \int_0^{\pi/\nu} \left\{ a_0 + \left[(1-c^2)\, a_1 - \frac{p_0}{\omega_0^2} \right] \cos \nu t \right\} a_1 \cos \nu t\, dt +$$

$$+ \varepsilon_2 \int_0^{t_1} (a_0 + a_1 \cos \nu t)^3\, a_1 \cos \nu t\, dt + \varepsilon_2 \int_{t_1}^{\pi/\nu} (a_0 + a_1 \cos \nu t)^3\, a_1 \cos \nu t\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2\nu} \left[(1-c^2)\, a_1 - \frac{p_0}{\omega_0^2} \right] a_1 + \left[\varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 \left(\frac{\pi}{\nu} - t_1 \right) \right] \left(\frac{3}{2} a_0^2 a_1^2 + \frac{3}{8} a_1^4 \right) +$$

$$+ \frac{1}{\nu} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left[\left(a_0^3 a_1 + \frac{9}{4} a_0 a_1^3 \right) \sin \nu t_1 + \left(\frac{3}{4} a_0^2 a_1^2 + \frac{1}{4} a_1^4 \right) \sin 2 \nu t_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} a_0 a_1^3 \sin 3 \nu t_1 + \frac{1}{32} a_1^4 \sin 4 \nu t_1 \right] = 0 \qquad (72)$$

Como vimos em (69) é

$$\cos \nu t_1 = -\frac{a_0}{a_1}$$

e portanto,

$$\sin \nu t_1 = \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a_1^2}}$$

$$\sin 2 \nu t_1 = -\frac{2 a_0}{a_1} \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a_1^2}}$$

$$\sin 3 \nu t_1 = \frac{4 a_0^2 - a_1^2}{a_1^2} \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a_1^2}}$$

$$\sin 4 \nu t_1 = -\frac{4 a_0}{a_1} \cdot \frac{2 a_0^2 - a_1^2}{a_1^2} \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a_1^2}}$$

$$t_1 = \frac{1}{\nu} \arccos \left(-\frac{a_1}{a_0} \right) \qquad (\nu t_1 \text{ entre } 0 \text{ e } \pi)$$

Estas expressões, substituídas em (71) e (72), permitem obter o sistema:

$$\begin{cases} \pi a_0 + \left[\pi \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \arccos \left(-\frac{a_0}{a_1} \right) \right] \left(a_0^3 + \frac{1}{2} a_0 a_1^2 \right) + \\ \qquad + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a_1^2}} \left(\frac{11}{6} a_0^2 a_1 + \frac{2}{3} a_1^3 \right) = 0 \\ \frac{\pi}{2} \left((1-c^2)\, a_1 - \frac{p_0}{\omega_0^2} \right) + \left[\pi \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \arccos \left(-\frac{a_0}{a_1} \right) \right] \left(\frac{3}{2} a_0^2 a_1 + \frac{3}{8} a_1^3 \right) + \\ \qquad + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a_1^2}} \left(\frac{1}{4} a_0^3 + \frac{13}{8} a_0 a_1^2 \right) = 0 \end{cases} \qquad (73)$$

a partir do qual se determinam os coeficientes a_0 e a_1 e portanto a solução (67) para cada conjunto (ε_1, ε_2, p_0, c). É no entanto muito mais fácil resolver o problema inversamente, o que, para o traçado de gráficos de amplificação, não tem inconveniência.

Referindo-nos ao exemplo da alínea 3.2.1., para obter a mesma solução, seria necessário que $\varepsilon_1 a_1^2 = -0{,}416$ e $\varepsilon_2 a_1^2 = 0{,}432$ (fig. 9).

Este último método é nìtidamente mais aproximado que o anterior, uma vez que, como se referiu, no método energético os resultados obtidos dependem da escolha dos pontos em que se acertam as energias.

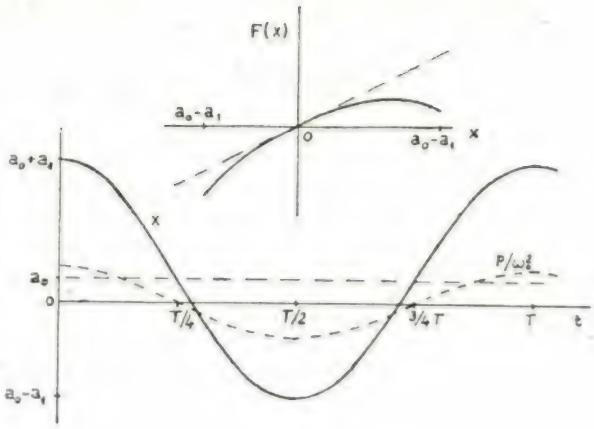


Fig. 9

Uma solução com mais parâmetros, por exemplo, $x = a_0 + a_1 \cos \nu t + a_2 \cos 2 \nu t$ permite normalmente maior aproximação, embora a resolução do sistema de 3 equações seja bastante mais dificultada.

Não se apresenta o gráfico geral de amplitudes, pois nos sistemas assimétricos entra em jogo mais uma variável paramétrica $\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$ o que criaria uma infinidade de famílias de curvas de amplificação.

* * *

Ao Ex.mo Professor Gouvêa Portela mais uma vez expressamos o nosso reconhecimento pela maneira como acompanhou e discutiu este trabalho.

BIBLIOGRAFIA

[1] — Neves da Silva, J. — Sobre os movimentos vibratórios de sistemas de um grau de liberdade com elasticidade do tipo k ($x \pm \varepsilon x^2$) — Técnica, n.° 332 Nov. 1963.
[2] — Hsu, C. S. — On the application of elliptic functions in non — linear forced oscillations — Quart. of Appl. Mathematics, n.° 4. Jan. 1960.
[3] — Milne, L. M. — Thomson, C.B.E. — Jacobian elliptic function tables — Dover Publications, Inc, New York, 1950.
[4] — Stoker, J. J. — Nonlinear Vibrations — Interscience Publishers, N.Y. 1950.
[5] — Harris, C. M. e Crede, C. E. — Shock and Vibration Handbook — Mc Graw-Hill, N.Y. 1961.
[6] — Neves da Silva, J. — Tratamento matemático dos movimentos vibratórios de características lineares — Técnica, n.° 331, Out. 1963.
[7] — Bogoliubov, N, e Mitropolski, I. — Les méthodes asymptotiques em théorie des oscillations non linéaires — Gauthier-Villars, Paris 3, 1962.
[8] — Page, L. — Introduction to Theoretical Physics — D. Van Nostrand Company, Inc. 3 Princeton, 1955.
[9] — Landau, L. D. e Lifshitz E. M. — Mechanics — Pergamon Press, Oxford, 1960.
[10] — Jacobsen, L. S. e Ayre, R.S. — Engineering Vibrations — Mc Graw-Hill, New York, 1958.
[11] — Klotter, K. — Steady state vibrations in systems having arbitrary restoring and arbitrary damping forces — Proceedings of the Symposium on Nonlinear Circuit Analysis — Polytechnic Institute of Brooklyn, N.Y., 1953.

SYNOPSIS

The author presents some methods for studying vibration amplitudes of undamped one-degree-of-freedom systems, of the Duffing type, acted by circular and elliptical sinusoidal perturbations.

JORNADAS DE AQUECIMENTO, VENTILAÇÃO E CONDICIONAMENTO DE AR

Paris, 24–26 de Maio de 1965

2.ª Feira
24 Maio

Apresentação das Jornadas — Por M. Missenard

AQUECIMENTOS E CONDUTAS DE FUMOS

— Aquecimentos com gás natural — por M. Molin
— Síntese dos estudos sobre as condutas de fumos — por M. Leclerc

VENTILAÇÃO DAS HABITAÇÕES

— A ventilação das habitações na Escandinávia — por M. Rydberg
— As novas regras francesas de ventilação das habitações — por M. Croiset
— A captação mecânica de fumo dos imóveis de grande altura — por M. Jardinier

3.ª Feira
25 Maio

FILTRAGEM DO AR

— Os filtros do ar — por Lassere
— Os ensaios de filtros de ar — por M. Ponroy
— Mesa redonda sobre a escolha dos filtros de ar

4.ª Feira
26 Maio

VISITAS DE INSTALAÇÕES

Novos estudos sobre

— As almofadas industriais — por M. Mackasy
— As almofadas incorporadas — por M. Clain

PROBLEMAS ACTUAIS DO CONDICIONAMENTO DE AR

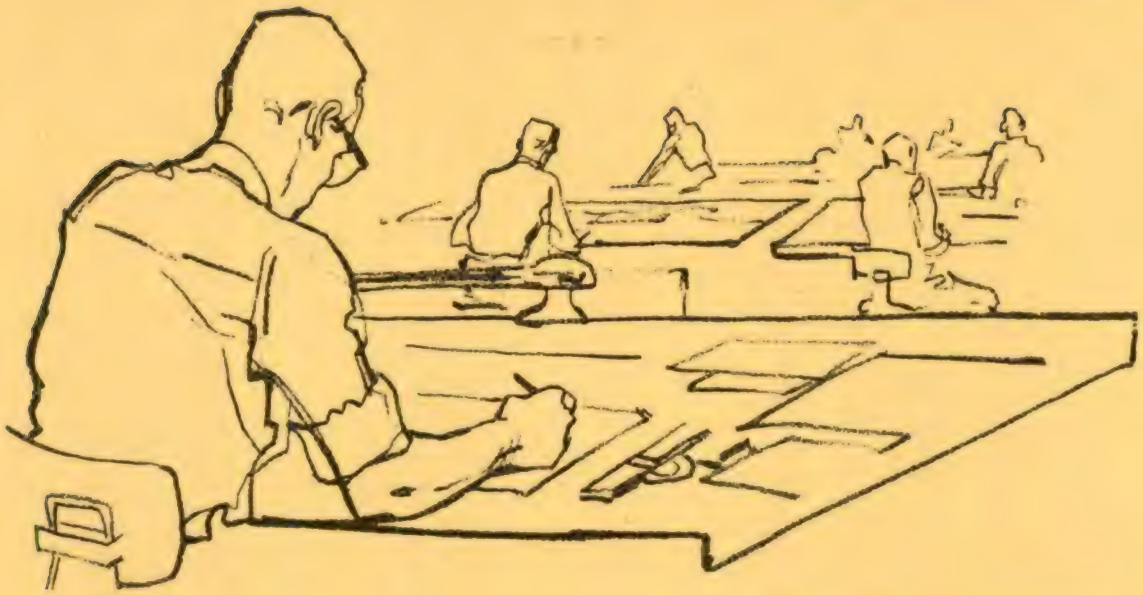
— O condicionamento de ar de escritórios — por M. Tirel
— Os economizadores de água no condicionamento de ar
— O emprego das águas de furos para o arrefecimento

Conclusão das Jornadas — por M. Missenard

Para todos os esclarecimentos dirigir-se a:

L'Institut Technique du Batiment e des Travaux Publics
9, Rue La Pérouse — Paris 16°

APA



CATERPILLAR* + S.T.E.T.

O BINÓMIO MAIS VANTAJOSO PARA QUALQUER PROBLEMA DE

MOVIMENTAÇÃO DE TERRAS

CATERPILLAR* O fabricante mais especializado, em todo o mundo, de tractores de rasto e de rodas, pás mecânicas de rasto e rodas (traxcavators*), motoniveladoras, moto-scrapers, escarificadores, "bulldozers", motores industriais e marítimos, grupos electrogéneos.

S.T.E.T. **SOCIEDADE TECNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, S.A.R.L.**

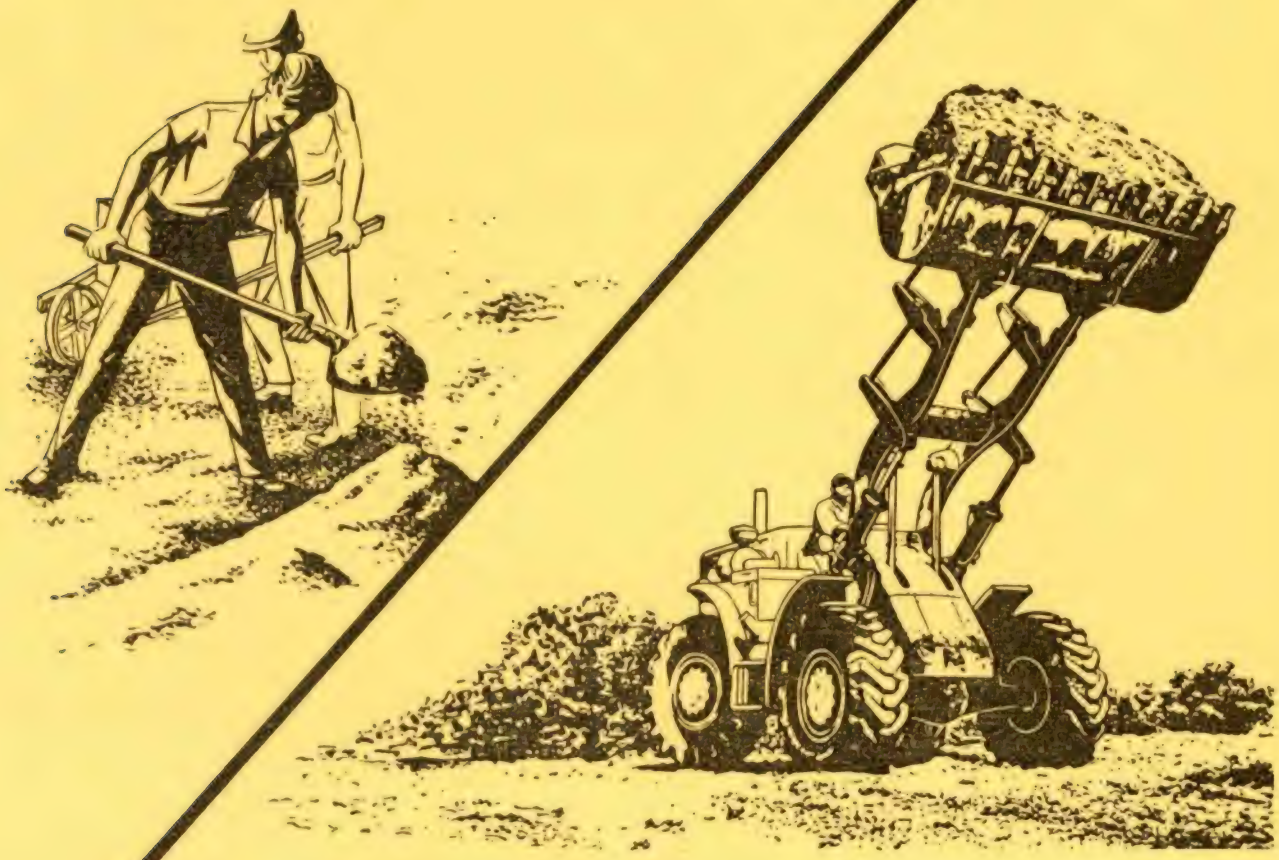
DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO EM PORTUGAL CONTINENTAL, ILHAS ADJACENTES, CABO VERDE E GUINÉ

ASSISTÊNCIA – REPARAÇÕES – PEÇAS GENUÍNAS

PRIOR VELHO — SACAVÉM
TELEF.: 251 0001/4 — TELEG.: «STETRA» — APARTADO 1351
LISBOA

*«CATERPILLAR» E «TRAXCAVATOR» SÃO MARCAS REGISTADAS DE CATERPILLAR TRACTOR CO. – PEORIA, ILLINOIS – E. U. A.

DA PÁ
CLÁSSICA
E DO CARRINHO
DE MÃO...



...À
PÁ MECÂNICA
(TRAXCAVATOR*)
CATERPILLAR*

TODO UM CAMINHO PERCORRIDO NA PROCURA DA MELHOR REALIZAÇÃO DO TRABALHO — DA MANEIRA MAIS EFICIENTE, MAIS ECONÓMICA E MAIS LUCRATIVA — PARA UMA MELHOR SATISFAÇÃO DAS NECESSIDADES HUMANAS.

ACTUALMENTE, EM QUALQUER TRABALHO DE

cerâmicas, minas e pedreiras,

A PALAVRA DA ORDEM É

CATERPILLAR*

S.T.E.T.

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO:

SOCIEDADE TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS E TRACTORES, S.A.R.L.
PRIOR VELHO — SACAVÉM
TELEF. 251 0001/4 — TELEG. «STETRA» — APARTADO 1351 — LISBOA

* «CATERPILLAR» E «TRAXCAVATOR» SÃO MARCAS REGISTADAS DE CATERPILLAR TRACTOR CO. — PEORIA, ILLINOIS — E. U. A.

C. D. U. 539.133.01 : 511.124

MOMENTO DE INÉRCIA, FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO, MASSA ASSOCIADA E MASSA REACTIVA

POR CARLOS DE SOUSA AMARO MARTINS
Primeiro Assistente do I. S.T.

Sejam duas partículas de massas m_1 e m_2, tais que $m_1 \geqslant m_2$, e cujos centros distam de r. A hemicarga electrodinâmica (adiante definida) *entre* as duas partículas é, em módulo, z. As partículas estão animadas de um movimento de rotação com uma energia ε, sendo I o momento de inércia, J o número quântico de rotação e, portanto, $g = 2J + 1$ a degenerescência.

Deste modo, fazemos

$$I = J(J+1)\frac{h^2}{8\pi^2\varepsilon} = J(J+1)\frac{h^2}{8\pi^2\varepsilon\, m_1^{\frac{1}{2}}\, m_2}\, m_a^{\frac{3}{2}} = \frac{k\,\Omega}{z^{\frac{3}{z+2}}}\, m_a^{\frac{3}{2}} = K\, m_a^{\frac{3}{2}}$$

onde

$K = \dfrac{k\,\Omega}{z^{\frac{3}{z+2}}}$ é uma medida do homeosterismo (*Técnica* n.º 312), (porquanto uma outra medida do homeosterismo é $K' = \dfrac{k\,\Omega}{\sigma\, z^{\frac{3}{z+2}}}$ sendo σ o número de simetria),

k é o factor de homeosteria,

Ω a constante de homeosteria,

z (valência electrodinâmica, número que pode ser fraccionário) é metade da soma do número de electrões que têm um certo spin com o número de electrões que têm o spin oposto e que se *movem entre* as duas partículas (ocasionalmente, é igual à diferença entre o número de pares de electrões ligantes (enlaçantes, formadores) e antiligantes (antienlaçantes, antiformadores); frequentemente, para radicais livres e moléculas no estado fundamental, z é igual à valência normal do átomo separado ou do que tiver a menor valência dentre os dois átomos separados; e, dum modo geral, para iões, radicais livres e moléculas, em estados excitados ou não, é igual ao número de traços de ligação que se representam no esquema das ligações ou a metade do número total de traços de ligação quando se tem em conta o spin); o spin nuclear altera a energia de interacção, e, por exemplo, no caso da molécula homonuclear de deutério o spin e a polarização nucleares produzem um efeito total equivalente a mais uma carga elementar, donde $z = \dfrac{3}{2}$; e

$m_a = \left(\dfrac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{3}} m_2$, com $m_1 \geqslant m_2$, é a massa associada.

A distância de equilíbrio entre os centros das partículas é, portanto,

$$r = \left(\frac{K}{m'}\right)^{\frac{1}{2}} m_a^{\frac{3}{4}} = \left[\frac{k\,\Omega\,(m_1 + m_2)}{z^{\frac{3}{z+2}}\, m_1\, m_2}\right]^{\frac{1}{2}} m_a^{\frac{3}{4}}$$

onde m' é a massa reduzida.

Pretendemos, em primeiro lugar, determinar o valor numérico da constante de homeosteria de átomos (incluindo os isótopos), radicais livres, iões e moléculas (inclusive de complexos e *complexos activados*). Seguidamente, um valor diferente da constante de homeosteria para os núcleos.

Consideremos o *átomo* de hidrogénio. Temos as duas partículas que são um protão de massa $m_1 = m_p$ e um electrão de massa $m_2 = m_e$.

A energia no estado fundamental é, em módulo,

$$\varepsilon = \frac{2\,\pi^2\, m_e\, e^4}{h^2}$$

e a massa associada

$$m_a = \left(\frac{m_p}{m_e}\right)^{\frac{1}{3}} m_e$$

Fazendo a substituição, obtemos o valor numérico da constante de homeosteria:

$$\boxed{\Omega = \frac{h^4}{16\,\pi^4\, m_e^2\, m_p^{\frac{1}{2}}\, e^4} = 2166 \times 10^{-8}\, g^{-\frac{1}{2}}\, cm^2}$$

e, imediatamente, o momento de inércia da *molécula* de hidrogénio, no estado fundamental (sem ter em conta o spin nuclear):

$$\boxed{I_{H_2} = \frac{h^4\, m_H}{16\,\pi^4\, m_e^2\, e^4} = 0{,}4688 \times 10^{-40}\, g\, cm^2}$$

De modo análogo se deduz a constante de homeosteria para os *núcleos*:

$$\boxed{\Omega = \frac{e^4}{\sqrt{m_p}\, m_e^2\, c^4}}$$

Vem a propósito lembrar que as partículas têm dimensões que não são desprezáveis ao serem comparadas com as distâncias a que se encontram nos núcleos. O momento de inércia de um núcleo de número de massa A também se pode calcular, mas em primeira aproximação e expresso em g cm², pela seguinte fórmula: $I = \frac{6}{5} \times 10^{-50}\, A^{\frac{5}{3}}$.

Das equações anteriores deduz-se

$$I = \frac{k\, I_{H_2}}{z^{\frac{5}{z+2}}} \left(\frac{m_a}{m_H}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Contudo, tendo em conta a elasticidade das ligações com vibrações anarmónicas, é

$$I = \frac{k\, I_{H_2}}{z^{\frac{3}{z+2}}} \left(\frac{m_a}{m_H}\right)^{2\,\mathrm{tgh}\,1}$$

com a equação de definição da massa associada:

$$m_a = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{4\,\mathrm{tgh}\,1}} m_2 \quad \text{e} \quad m_1 \geqslant m_2$$

Atendendo a que $2\ \mathrm{tgh}\ 1 = 1{,}5232\ldots$ e utilizando a escala de massas atómicas (e *isotópicas* a usar sempre) do $^{12}C = 12$ (ano de 1961), resulta a seguinte fórmula, já preparada para as aplicações, que dá o momento de inércia expresso em g cm^2:

$$\boxed{I = \frac{0{,}46824 \times 10^{-40}}{z^{\frac{3}{z+2}}}\ k\ M_a^{1{,}5232}}$$

com a massa (molar) associada definida por

$$\boxed{M_a = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{1}{3{,}0464}} M_2} \quad \text{com} \quad \boxed{M_1 \geqslant M_2}$$

A distância de equilíbrio entre os centros de massas das partículas é

$$r_0 = \sqrt{\frac{I}{m'}}$$

e, por consequência,

$$\boxed{r_0 = \sqrt{\frac{I\,(m_1 + m_2)}{m_1\ m_2}} = \sqrt{\frac{I\,(M_1 + M_2)\ N}{M_1\ M_2}}}$$

sendo I dado pela fórmula anterior e, ainda,

$$\boxed{m_1 = \frac{M_1}{N}} \quad \text{e} \quad \boxed{m_2 = \frac{M_2}{N}}$$

onde N é o número de Avogadro.

Resta-nos mostrar como se determina o factor de homeosteria, k, propor um método de cálculo de momentos de inércia de substâncias de estrutura poliatómica, de frequências de vibração e dar alguns exemplos de aplicação.

Consideremos as seguintes sucessões:

J	1	2	3	4	5	6	7
J (J+1)	2	6	12	20	30	42	56

e, nas camadas de valência de cada uma das partículas, o electrão mais exterior (ou dentre os mais exteriores) que participa na ligação e ocupa o orbital a seguir indicado (a determinação destes orbitais, até mesmo quando em estados excitados, torna-se fácil ao fazer o *esquema das ligações*, embora reduzido à expressão mais simples).

Formamos o seguinte quadro em que se obtém o valor correspondente do factor de homeosteria, k, pela divisão ordenada dos termos da sucessão anterior.

Proveniência da ligação	J	J (J + 1)	k
n p | 1 s	6 / 7	42 / 56	$\frac{42}{56} = 0{,}75$
1 s | 1 s n p | u p	6 6 / 5 5	42 / 30	$\frac{42}{42} = \frac{30}{30} = 1$
n p | u s u ≠ 1	5 / 4	30 / 20	$\frac{30}{20} = 1{,}5$
1 s | n s	5 / 3	30 / 12	$\frac{30}{12} = 2{,}5$
n s | u s n e u ≠ 1	5 / 2	30 / 6	$\frac{30}{6} = 5$

Quando o número de partículas for maior que 2, consideramos todos os grupos, entre os quais existam interacções, aos pares designados por i, e introduzimos o conceito de massa reactiva do *par* de grupos i a qual definimos por

$$m_i = \left(\frac{k}{z^{\frac{3}{z+2}}} \right)^{\frac{1}{2\,\mathrm{tgh}\,1}} m_a = \left(\frac{k}{z^{\frac{3}{z+2}}} \right)^{\frac{1}{2\,\mathrm{tgh}\,1}} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{\frac{1}{4\,\mathrm{tgh}\,1}} m_2 = \gamma \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{\frac{1}{4\,\mathrm{tgh}\,1}} m_2 = \gamma\, m_a$$

sendo m_a a massa associada ao par de grupos i, $m_1 > m_2$ as massas de cada um dos grupos, tmantendo-se o significado anterior de k e z, mas, agora, entre cada um dos grupos de partículas omados dois a dois; e $\gamma = \left(\frac{k}{z^{\frac{3}{z+2}}} \right)^{\frac{1}{2\,\mathrm{tgh}\,1}}$ é o coeficiente da massa reactiva.

A fórmula prática, na escala de massas atómicas (*isotópicas*) e molares, é

$$\boxed{M_i = \frac{k^{\frac{1}{1{,}5232}}}{z^{\frac{1{,}9046}{z+2}}} M_a = \frac{k^{\frac{1}{1{,}5232}}}{z^{\frac{1{,}9046}{z+2}}} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{1}{3{,}0464}} M_2 = \gamma \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{1}{3{,}0464}} M_2 = \gamma\, M_a}$$

onde $\boxed{\gamma = \frac{k^{\frac{1}{1{,}5232}}}{z^{\frac{1{,}9046}{z+2}}}}$ é o coeficiente da massa reactiva.

Se a disposição das partículas for linear, o momento de inércia calcula-se, expresso em g cm², pela seguinte fórmula:

$$\boxed{I = 0{,}46824 \left(\sum_{i=1}^{n} M_i \right)^{1{,}5232} \times 10^{-40}}$$

A massa reactiva M_i goza da propriedade aditiva e n é o número total de pares de grupos o qual por sua vez é igual ao número de ligações (alguns grupos podem conter uma só partícula).

Quando a estrutura não for linear e houver três momentos principais de inércia, I_A, I_B e I_C, podendo ser iguais entre si, calcula-se do mesmo modo a grandeza I', pela fórmula antecedente, a qual se equiparte pelas n ligações diferentes, e obtém-se o produto dos momentos principais de inércia pela seguinte equação:

$$\sqrt[3]{I_A\, I_B\, I_C} = \frac{I'}{n} = \bar{I}$$

donde

$$I_A\, I_B\, I_C = \left(\frac{I'}{n}\right)^3$$

e

$$\boxed{\sqrt{I_A\, I_B\, I_C} = \left(\frac{I'}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

sendo n o número de pares de grupos que é igual ao número de ligações entre eles.

A raiz quadrada deste produto é que tem grande interesse nos cálculos estatísticos da Energética, tornando-se desnecessário conhecer, em pormenor, os valores de cada um dos momentos principais de inércia. Este método serve para calcular o produto dos momentos principais de inércia até de moléculas complicadas cujos momentos de inércia são muitas vezes difíceis de obter pela espectroscopia.

É notável a concordância dos valores calculados, aplicando este método, com os valores experimentais, desde os muito pequenos até aos muito grandes! Quando os valores experimentais dos momentos de inércia são conhecidos, o emprego do método aqui apresentado fornece mais uma prova da estrutura da substância, além de permitir a sua identificação.

A valência electrodinâmica, tal como ficou definida, tem importância primordial no estudo dos metais, dos electrólitos, dos compostos não estequiométricos, dos semicondutores, etc.

Apliquemos a lei de Hooke, combinada com as equações que deduzimos, à molécula de hidrogénio. Concluimos que a frequência de vibração harmónica, ν_e, é dada pela equação

$$I\, \nu_e^2 = \frac{J\,(J+1)\,h^2}{16\,\pi^4\,(\sqrt{K'} - \sqrt{K})^2\, m_a^{\frac{3}{2}}}$$

Ainda, para a molécula de hidrogénio, fazemos: $J = 5$, $k = 1$, $k' = 0{,}75$ (do quadro anterior) $K' = \frac{k'}{z^{\frac{3}{z+2}}}\,\Omega$, $K = \frac{k}{z^{\frac{3}{z+2}}}\,\Omega$, $z = 1$, e $m_a = m_H$, valores numéricos já conhecidos que substituimos na equação antecedente.

Obtemos, deste modo, a seguinte constante fundamental de energia, ε_e,

$$\boxed{\varepsilon_e = I\, \nu_e^2 = 82{,}37 \times 10^{-14}\ \text{erg}}$$

ou seja, $4\pi^2 I \nu_e^2 = 3252 \times 10^{-15}$ cm dyne o binário (momento de forças), e a frequência de vibração da molécula de hidrogénio: $1{,}324 \times 10^{14}$ seg.$^{-1}$, utilizando o valor do momento de inércia anteriormente calculado.

Para um rotor de momento de inércia I e frequência de vibração ν_e, quantificamos a constante de energia, ε_e, e será

$$\nu_e \sqrt{I} = \sqrt{\frac{l\,\varepsilon_e}{8}}$$

donde obtemos a frequência de vibração, expressa em seg.$^{-1}$:

$$\boxed{\nu_e = \sqrt{\frac{82{,}37\,l}{8\,I}} \times 10^{-7} = \sqrt{\frac{10{,}296\,l}{I}} \times 10^{-7}}$$

onde l é o número quântico de oscilação (rotação-vibração), $l = 0, 1, 2 \ldots$ constante para um grande número de substâncias, tornando-se fácil a sua selecção considerada a homeosteria. Este número de oscilação, l, é dentre as medidas do homeosterismo aquela que dá maior selectividade.

Vamos dar alguns exemplos de aplicação, utilizando números de massa, isto é, valores aproximados das massas atómicas (além disso, as contas foram feitas com régua de cálculo), e, apenas, para indicar como se fazem os cálculos.

1 — Momento de inércia e frequência de vibração da molécula de $^{35}Cl\ ^{127}I$ no estado $^1\Sigma^+$, e distância internuclear de equilíbrio.

1.1 — Proveniência da ligação: 3 p | 5 p

1.2 — Factor de homeosteria: $k = 1$ (do quadro anterior).

1.3 — Valência electrodinâmica: $z = 1$

1.4 — Massa associada:

$$M_a = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{1}{3{,}0464}} M_2 = \left(\frac{127}{35}\right)^{\frac{1}{3{,}0464}} 35 = 61{,}2\ g$$

1.5 — Momento de inércia:

$$I = \frac{0{,}46824 \times 10^{-40}\ k}{z^{\frac{3}{z+2}}} M_a^{1{,}5232} = 246 \times 10^{-40}\ g\ cm^2$$

1.6 — Frequência de vibração:

$$\nu_e = \sqrt{\frac{82{,}37\,l}{8\,I}} \times 10^{-7}\ s^{-1} = 2\sqrt{\frac{82{,}37}{246}} \times 10^{13}\ seg.^{-1} = 0{,}1157 \times 10^{14}\ s^{-1}$$

ou

$$\omega_e = \frac{\nu_e}{c} = 386\ cm^{-1}$$

1.7 — Distância internuclear de equilíbrio:

$$r_0 = \sqrt{\frac{I(m_1 + m_2)}{m_1\, m_2}} = \sqrt{\frac{I(M_1 + M_2)N}{M_1\, M_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{246 \times 10^{-40} \times 162 \times 0{,}6023 \times 10^{24}}{35 \times 127}} = 2{,}321 \times 10^{-8}\ \text{cm}$$

2 — Momento de inércia da molécula linear N_2O ($N \equiv N = O$), no estado fundamental.

2.1 — Pares de grupos:

$$N \equiv \text{com} \equiv NO$$
$$N \equiv N = \text{com} = O$$

2.2 — Proveniência das ligações: 2 p | 2 p.

2.3 — Factor de homeosteria: $k = 1$.

2.4 — Valências electrodinâmicas: $z_1 = 3$ e $z_2 = 2$.

2.5 — Massas atómicas (isotópicas): $N = 14$ e $O = 16$.

2.6 — Massa reactiva:

$$M = \frac{\left(\frac{30}{14}\right)^{\frac{1}{3{,}0464}} \times 14}{3^{\frac{1{,}9046}{5}}} + \frac{\left(\frac{28}{16}\right)^{\frac{1}{3{,}0464}} \times 16}{2^{\frac{1{,}9046}{4}}}\ g = 25{,}68\ g$$

2.7 — Momento de inércia:

$$I = 0{,}46824 \times 25{,}68^{1{,}5232} \times 10^{-40}\ g\ cm^2 = 66{,}0 \times 10^{-40}\ g\ cm^2$$

3 — Momento de inércia da molécula linear de acetileno (etino) C_2H_2 ($H - C \equiv C - H$) (no estado excitado, a molécula deixa de ser linear).

3.1 — Pares de grupos:

2 pares de grupos distintos: $H - \text{com} - C_2H$
1 par de grupos iguais: $HC \equiv \text{com} \equiv CH$

3.2 — Proveniência das ligações: 2 p | 1 s e 2 p | 2 p (referimo-nos ao electrão mais exterior que participa na ligação).

3.3 — Factores de homeosteria: $k_1 = 0{,}75$ e $k_2 = 1$.

3.4 — Valências electrodinâmicas: $z_1 = 1$ e $z_2 = 3$.

3.5 — Descrição das ligações na molécula de acetileno feitas por electrões que ocupam orbitais moleculares.

Para comparar com a notação diferente que utilizámos, vamos fazer uma breve descrição das ligações por orbitais moleculares.

Há, em cada um dos átomos de carbono, em primeiro lugar, excitação para a promoção de um dos dois electrões que ocupam um orbital $2s$ a *um* orbital $2p$ que, por sua vez, degenera em três orbitais $2p$ ($2p_{+1}$ $2p_0$ $2p_{-1}$) para serem ocupados cada um por seu electrão, seguida da combinação das funções de ondas electrónicas, o que dá dois orbitais sp, em cada átomo de carbono, e os restantes orbitais $2p$ (degenerados, dois por átomo de carbono) ficam, por enquanto, inalterados. A ligação entre os átomos de carbono faz-se pela sobreposição dos orbitais híbridos sp, um em cada átomo de carbono, a qual conduz à formação de um orbital molecular σ. O outro orbital híbrido, em cada átomo de carbono, sobrepõe-se ao orbital $1s$ do átomo de hidrogénio e origina orbitais moleculares σ nas ligações carbono-hidrogénio. Os orbitais p, que estavam inalterados, sobrepõem-se, lateralmente, e formam dois orbitais moleculares π, localizados, da sobreposição dos quais resulta a simetria cilíndrica ao longo do eixo que passa pelas posições de equilíbrio dos núcleos dos átomos.

Fica bem patente a vantagem da descrição anterior sobre esta, e, por isso, preferimos utilizar aquela exclusivamente.

3.6 — Massas atómicas (isotópicas): $C = 12$ e $H = 1$.

3.7 — Massa reactiva:

$$M = 2 \times \frac{\left(\frac{25}{1}\right)^{\frac{1}{3,0464}} \times 1}{1} \times 0,75^{\frac{1}{1,5232}} + \frac{13}{3^{\frac{1,9046}{5}}} = 13,36 \text{ g}$$

3.8 — Momento de inércia:

$$I = 0,46824 \times 13,36^{1,5232} \times 10^{-40} \text{ g cm}^2 = 23,4 \times 10^{-40} \text{ g cm}^2$$

4 — Momento de inércia da molécula de metano CH_4 $\left(\begin{array}{c} H \\ | \\ H-C-H \\ | \\ H \end{array} \right)$ que tem uma esfera central de inércia e os átomos de hidrogénio dispostos nos vértices de um tetraedro regular $\left(I = \frac{8}{3} m_H r^2\right)$.

4.1 — Pares de grupos:

4 pares de grupos $H - \text{com} - \overset{|}{\underset{|}{C}}H$

4.2 — Numero de ligações distintas segundo os planos: $n = 2$

4.3 — Proveniência das ligações: $1s \mid 2p$

4.4 — Factor de homeosteria: $k = 0,75$

4.5 — Valência electrodinâmica: $z = 1$

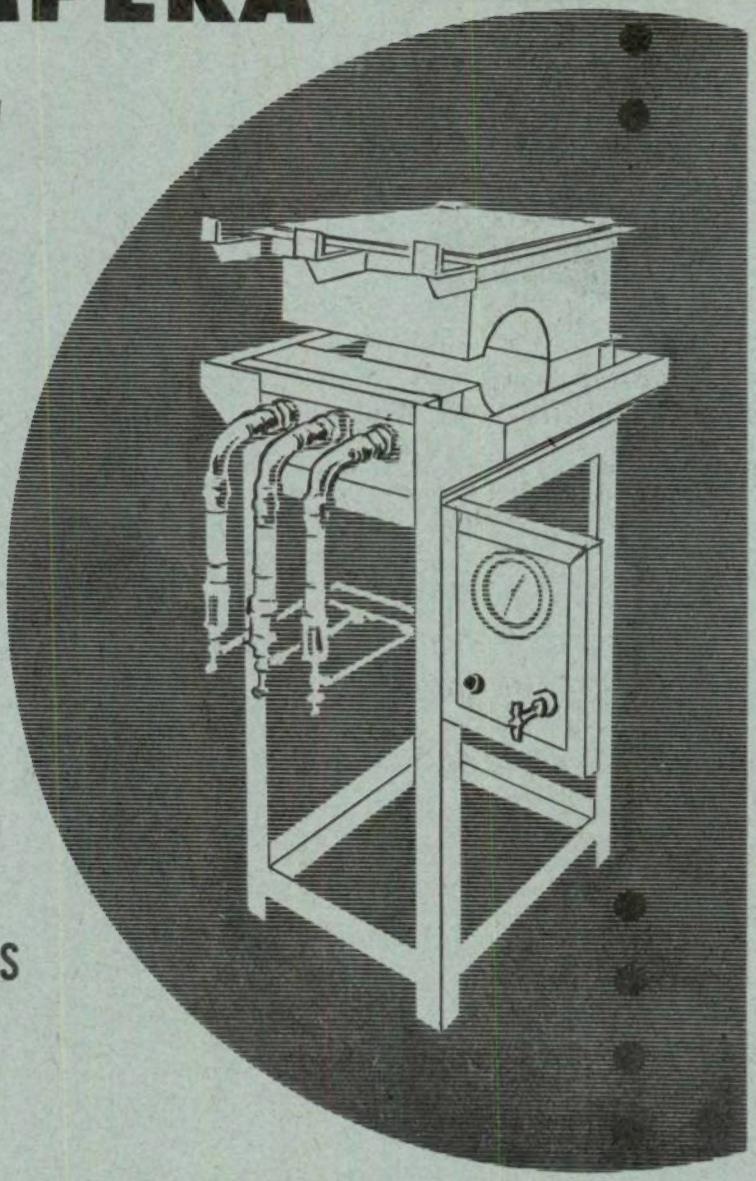
4.6 — Massas atómicas (isotópicas): $C = 12$ e $H = 1$

4.7 — Massa reactiva:

$$M = 4 \times \frac{\left(\frac{13}{1}\right)^{\frac{1}{3,0464}} \times 1}{1} \times 0,75^{\frac{1}{1,5232}} \text{ g} = 7,7 \text{ g}$$

FORNOS DE FORJA E DE TÊMPERA

AQUECIDOS A ***PROPACIDLA***



UTILIZAÇÕES:
Forja, têmpera
e recozimento
nas indústrias
METALO-MECÂNICAS

PROPACIDLA

O MELHOR GÁS AO SERVIÇO DA INDÚSTRIA

Companhia Portuguesa de Trefilaria

ARMADURAS PRÉ-FABRICADAS **MALHASOL**

Tensão de segurança 3.000 Kg/cm²

AÇO BI

Tensão de segurança 4.000 Kg/cm²

AÇOS DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO

que pela eficiência técnica e económica a que conduzem, são um indispensável elemento na moderna construção civil

Para qualquer obra em betão armado consulte:

DIAL — GABINETE TECNICO

R. DO INSTITUTO INDUSTRIAL, 18-1.º

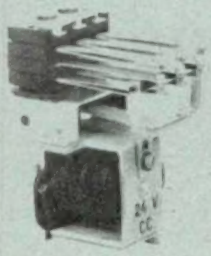
TELEFONES 671224 5 E 673785 — LISBOA

RELÉS ELECTROMAGNÉTICOS

SELECTROM Soc electrom Lda. Portugal

6 - 12 - 24 - 48 - 110 - 220 V C. A. ou C. C.

Contactos:



5 A ou 10 A até

250 V C. A.

ou 30 V C. C.

Fabricantes e Distribuidores Gerais

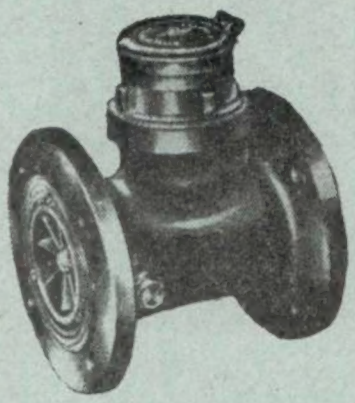
Sociedade **electrom** Limitada

Largo de S. Carlos, 8 - 2.º — Lisboa - 2

Telef. 32 22 77

CONTADORES PARA LÍQUIDOS

Sistema "Woltman"



LANGE

De:

50 m/m

a

300 m/m

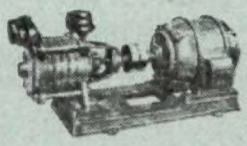
REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:

Técnica de Hidráulica e de Electricidade, Ld.ª

47-A RUA DO ALECRIM 47-B

LISBOA

BOMBAS



Se tem um problema de bombas, consulte

VASCO PESSOA, LDA.

Rua da Boavista, 63

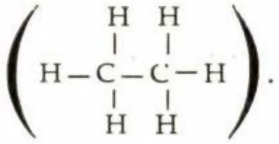
LISBOA

4.8 — Momento de inércia

$$I = \frac{0{,}46824 \times 7{,}7^{1{,}5232} \times 10^{-40}}{2} \text{ g cm}^2 = 5{,}26 \times 10^{-40} \text{ g cm}^2$$

De um modo análogo, e mais simplesmente porque é $k = 1$, se calcula, por exemplo, o momento de inércia da molécula de tetracloreto de carbono, Cl_4C, do ião $(SO_4)^{2-}$, do ião $(ClO_4)^-$, etc., que têm 4 eixos ternários, isto é, um mesmo número de simetria: $\sigma = 4 \times 3 = 12$.

5 — Produto dos momentos principais de inércia da molécula de etano, C_2H_6



Determinamos, esquemàticamente, o produto dos três momentos principais de inércia (sendo dois iguais entre si), e é a sua raiz quadrada que tem grande importância nos cálculos da Energética. Teremos:

$1 \times CH_3$	com CH_3		15,0 g
$2 \times H$	com C_2H_5	$2 \times 29^{\frac{1}{3{,}0464}} \times 0{,}75^{\frac{1}{1{,}5232}}$	= 5,0 g
$4 \times H$	com CH	$4 \times 13^{\frac{1}{3{,}0464}} \times 0{,}75^{\frac{1}{1{,}5232}}$	= 7,6 g
$n = 7$ ligações		Massa reactiva:	$M = 27{,}6$ g

logo,

$$I' = 0{,}46824 \times 27{,}6^{1{,}5232} \times 10^{-40} \text{ g cm}^2 = 74 \times 10^{-40} \text{ g cm}^2$$

e

$$\sqrt[3]{I_A I_B I_C} = \frac{I'}{n} = \frac{74 \times 10^{-40}}{7} = 10{,}6 \times 10^{-40} \text{ g cm}^2$$

donde

$$I_A I_B I_C = 1160 \times 10^{-120} \text{ U. C. G. S.}$$

e é

$$\sqrt{I_A I_B I_C} = 34 \times 10^{-60} \text{ U. C. G. S.}$$

6 — Produto dos momentos principais de inércia da molécula de etileno (eteno) C_2H_4.

Temos:

Grupos	Número de pares de grupos e número de ligações n	Orbitais	Factor de homeosteria k	Valência electrodinâmica z	Massa reactiva M
H_2C com CH_2	1	np | up	1	2	$\frac{14}{1{,}39} =$ 10,05
C_2H_3 com H	4	ns | 1s	2,5	1	$4 \times 27^{\frac{1}{3{,}0464}} \times 2{,}5^{\frac{1}{1{,}5232}} = 21{,}50$
	$n = 5$				$M = 31{,}55$